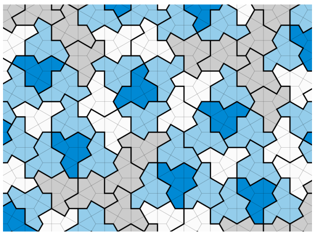
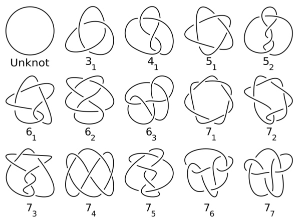
Anja Randecker
Florent Schaffhauser
Sommersemester 2024

# HEGL Proseminar/Seminar „Mathematik unterrichten“

In diesem (Pro)seminar wollen wir zunächst mathematische Themen vertieft besprechen, um dann einen Workshop, ein Arbeitsblatt, ein Exponat, ... für Schülerinnen und Schüler zu erstellen, die das mathematische Thema aufgreifen.






## Organisatorisches und Ablauf

Das (Pro)seminar findet mittwochs von 14 bis 17 Uhr statt.

Zunächst halten alle Teilnehmenden einen (kürzeren) mathematischen Vortrag. In der zweiten Hälfte des Semesters bearbeiten Sie dann in Gruppen ein Projekt und stellen dieses am Ende des Semesters vor.

## Vorbesprechung

Wir treffen uns am Freitag, 2. Februar, um 13:00 Uhr (s. t.) im Seminarraum 3, um den Ablauf des (Pro)seminars und die möglichen Themen zu besprechen.

Bitte melden Sie sich rechtzeitig bei uns, wenn Sie am (Pro)seminar teilnehmen möchten, aber nicht zur Vorbesprechung kommen können.

## Zielgruppe

Das (Pro)seminar kann als Proseminar oder als “Seminar im Bachelor” in den Studiengängen der Mathematik angerechnet werden. Es eignet sich insbesondere, aber nicht ausschließlich, für Studierende im Bachelor 50%.

## Anmeldung

Wenn Sie einen Vortrag übernehmen möchten, tragen Sie sich bitte bis 1. Februar im MÜSLI ein und nehmen an der Vorbesprechung teil.

Sollten Sie nach dem 5. April von Ihrem Vortrag zurücktreten, gilt das (Pro)seminar als “nicht bestanden”.

Bei Fragen können Sie sich gerne an Florent Schaffhauser (fschaffhauser@mathi.uni-heidelberg.de) oder Anja Randecker (randecker@mathi.uni-heidelberg.de) wenden.

## Semesterplan

- Semesterbeginn: jeden Mittwoch je drei Vorträge von 14:00 bis 17:00 Uhr
  - 17. April: Gerechtes Teilen
  - 24. April: Spieltheorie
  - 8. Mai: Graphentheorie
  - 15. Mai: Benfords Gesetz
  - 22. Mai: Projektive Geometrie
- Ende Mai bis Mitte Juli: Arbeit in Projektgruppen mit mehreren Statusupdates zur Seminarzeit
- Ende Juli: Abschlusspräsentationen

## Vorbesprechung

Bitte melden Sie sich rechtzeitig und selbstständig bei den Betreuenden Ihres Themas für eine Vorbesprechung zu Ihrem Vortrag:

- Thema 1: Anna Schilling, `www.mathi.uni-heidelberg.de/~aschilling/`
- Themen 2 und 5: Florent Schaffhauser, `matematiflo.github.io/`
- Thema 3: Anja Randecker, `www.mathi.uni-heidelberg.de/~arandecker/`
- Thema 4: Christoph Schnörr, `ipa.math.uni-heidelberg.de/cschnoerr/`

Bis spätestens zehn Tage vor dem Vortrag müssen Sie einen Termin zur Vorbesprechung ausgemacht haben, Sie können sich aber natürlich auch schon weitaus früher melden, insbesondere, wenn Sie Fragen haben.

## Vortrag

Für jeden Vortrag sind 45 Minuten geplant, danach sind ein paar Minuten Zeit für Fragen.

Ein Handout oder eine schriftliche Ausarbeitung ist nicht gefordert.

## Projekte

Nachdem wir alle Vorträge gehört haben, legen Sie sich in Dreiergruppen auf Projekte fest. Um diese zu bearbeiten, haben Sie Zeit bis Mitte Juli. Dabei können Sie gern auch die Infrastruktur des HEGL (`https://hegl.mathi.uni-heidelberg.de/`) nutzen, insbesondere zur Seminarzeit am Mittwoch.

## Themen

### Thema 1: Gerechtes Teilen

Hier wollen wir verschiedene Methoden kennen lernen, wie Dinge (z. B. Kuchen oder Perlenketten) gerecht zwischen mehreren Leuten aufgeteilt werden können und was „gerecht" in diesem Zusammenhang überhaupt bedeutet.

**Vorträge:**

**(1.1) Grundlagen und verschiedene Protokolle**
Zu Beginn sollen einige Grundbegriffe ($\sigma$–Algebra, proportionale und neidfreie Aufteilung) und der Satz von Nyman eingeführt werden. Anschließend werden einige Protokolle und ihre Eigenschaften (proportional? neidfrei? realisierbar?) vorgestellt. Die Quelle gibt viele verschiedene Protokolle an, es müssen (und sollen) nicht alle besprochen werden, es sollte aber mindestens ein proportionales und ein neidfreies Protokoll dabei sein. Wie viele genau, hängt von der Zeit ab.
*Literatur* [Her18, Kapitel 1].

**(1.2) Gerechte Teilung mit dem Sperner-Lemma**
Eine (fast) neidfreie Aufteilung eines Kuchen gelingt mit dem Sperner-Lemma. In diesem Vortrag soll das Lemma erklärt und bewiesen werden und anschließend auf das Problem der Kuchenteilung angewendet werden.
*Literatur* [Su99], ein Beweis von Sperners Lemma findet sich auch in [AZ18, Kapitel 28.6].

**(1.3) Gerechte Teilung einer Perlenkette**
Nun soll eine Perlenkette mit verschiedenen Sorten Perlen gerecht zwischen zwei Personen geteilt werden. In diesem Vortrag wird gezeigt, wie und warum das mit zwei oder drei verschiedenen Perlenarten funktioniert.
*Literatur* [Fri23].

### Thema 2: Spieltheorie

Hier wollen wir die grundlegenden mathematischen Konzepte der Spieltheorie vorstellen. Wir beschränken uns auf Spiele in *Normalform*. Das zentrale Konzept ist das Nash-Gleichgewicht.

**Vorträge:**

**(2.1) Grundlegende Konzepte und Nash-Gleichgewichte.**
Spiele in Normalform, Strategieprofile und Auszahlungen. Lösung eines Spiels, gemischte Strategien, beste-Antwort-Funktionen.
*Literatur* [BEG02, Auszüge aus Kapiteln 2.1 und 2.2].

**(2.2) Die Existenz von Nash-Gleichgewichten, Anwendungen des Nash-Konzeptes.**
Der Fixpunktsatz von Kakutani und die Existenz von Nash-Gleichgewichten. Das homogene Mengen-Oligopol, das Bertrand-Duopol.
*Literatur* [BEG02, Auszüge aus Kapiteln 2.3 und 2.4].

**(2.3) Perfekte Gleichgewichte, gemischte Strategien und unvollständige Information.**
Definition und Existenz von perfekten Gleichgewichten. Nash-Gleichgewichte bei unvollständiger Information.
*Literatur* [BEG02, Auszüge aus Kapiteln 2.6 und 2.7].

## Thema 3: Graphentheorie

Hier wollen wir Grundlagen zur Graphentheorie kennenlernen und uns mit Färbbarkeit beschäftigen, beginnend mit der Färbbarkeit von planaren Graphen.

**Vorträge:**

**(3.1) Planare Graphen**
In diesem Vortrag führen Sie die Grundlagen ein: Definition von Graphen, bipartite Graphen, planare Graphen, duale Graphen. Das wichtigste Ergebnis ist die Eulerformel und ihre Anwendungen; wenn Zeit ist, können Sie auch Kuratowskis Satz besprechen.
*Literatur* [Wes95, Section 6.1, eventuell der Anfang von Section 6.2].

**(3.2) Fünf-Farben-Satz**
Wir beweisen, dass sich jede Karte mit fünf Farben färben lässt. Der Vier-Farben-Satz soll erwähnt, aber (natürlich) nicht bewiesen werden.
*Literatur* [Wes95, Auszüge aus Section 5.1, Theorem 6.3.1], Internetrecherche zur Geschichte des Vier-Farben-Satzes.

**(3.3) Satz von Ringel–Youngs**
Nun soll es von planaren Graphen zu solchen von höherem Geschlecht gehen. Dazu lernen wir zunächst, was das Geschlecht von Flächen ist.
*Literatur* [Wes95, Surfaces of Higher Genus in Section 6.3], gegebenenfalls weitere Literatur zur Topologie.

**Thema 4: Benfords Gesetz**

**Vorträge:**

**(4.1) Benfords Gesetz: Informelle Einführung**
Zunächst ohne jede Mathematik, zum Phänomen: Was sind die empirischen Beobachtungen, welchen das Benfordsche Gesetz zugrunde liegt?
Historie und Beispiele aus allen Lebensbereichen. Wie verdichtet und kommuniziert man diese Information einer Schulklasse so, dass die Abstraktion vom konkreten Szenarium gelingt?
Beispiele von Anwendungen (gefälschte Daten)
*Literatur*
Spektrum der Wissenschaft Kolumne: `https://www.spektrum.de/kolumne/benfordsches-gesetz-die-uebermaechtige-eins/1984693`
Benfords law in physics: `https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.04.021`
Wolfram MathWorld: `https://mathworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html`
Weitere Referenzen in dieser Literatur sowie auch die Literaturverweise unten.´

**(4.2) Von der Schulmathematik zur Benfordverteilung**
Mathematische Grundbegriffe und Konzepte, von der näherungsweisen Darstellung reeller Zahlen bis zur Wahrscheinlichkeitsverteilung, werden lückenlos eingeführt, um eine Schulklasse „abzuholen“ und auf elementare Beweisführungen vorzubereiten.
Was ist gewonnen, wenn eine mathematische Begründung gelingt?
(universelle Anwendbarkeit, Prädiktion)
*Literatur*
Textbuch zur Wahrscheinlichkeitstheorie (keine Maßtheorie!) sowie:
Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt. ETH Zurich, 2007 `https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/Benfords%20Gesetz%20%C3%BCber%20f%C3%BChrende%20Ziffern%20(Artikel)/benford.pdf`
The Surprising Accuracy of Benford's Law in Mathematics, Illionois Geometry Lab, Undergraduate Research Project: `https://arxiv.org/abs/1907.08894`
H. Humenberger. Das „Benford-Gesetz“ – warum ist die Eins als führende Ziffer von Zahlen bevorzugt? In: Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4, pages 161–176. Springer Spektrum, 2018. `https://doi.org/10.1007/978-3-658-17599-3_12`

**(4.3) Wie kann man Benford's Gesetz verstehen?**
Wie kann man Benford's Gesetz mathematisch begründen?
Elementare Beweisführung ohne Maßtheorie.
*Literatur*
H. Humenberger. Das „Benford-Gesetz“ – warum ist die Eins als führende Ziffer

von Zahlen bevorzugt? In: Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4, pages 161–176. Springer Spektrum, 2018. `https://doi.org/10.1007/978-3-658-17599-3_12`

Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt. ETH Zurich, 2007 `https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/Benfords%20Gesetz%20%C3%BCber%20f%C3%BChrende%20Ziffern%20(Artikel)/benford.pdf`

Der Vollständigkeit halber ein originaler Fachartikel (nicht unbedingt für den Vortrag!): Hill paper: A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law `https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-10/issue-4/A-Statistical-Derivation-of-the-Significant-Digit-Law/10.1214/ss/1177009869.full`.

## Thema 5: Projektive Geometrie

Hier wollen wir die Grundlagen der projektiven Geometrie verstehen, und einige schöne Anwendungen wie den Satz von Pappus oder die Sätze von Desargues und Pascal kennenzulernen. Ein weiteres Ziel ist es, die Gruppe der sogenannten Möbiustransformationen und das Doppelverhältnis vorzustellen.

**Vorträge:**

**(5.1) Affine Räume und affine Abbildungen.**
Affine Räume und Unterräume, affine Abbildungen. Die Unabhängigkeit einer Familie von Punkten und die Erläuterung, wie sich affine Abbildung nach Wahl von affinen Koordinaten mit Matrizen beschreiben lassen.
*Literatur* [Fis92, §1.1 und 1.2.].

**(5.2) Projektive Räume und projektive Abbildungen.**
Der Begriff des projektiven Raumes, projektive Koordinaten, und der Abschluss eines affinen Raumes. Die projektive Unabhängigkeit einer Familie von Punkten im projektiven Raum.
*Literatur* [Fis92, §3.2.1–3.2.6 und 3.2.7–3.2.9.].

**(5.3) Möbiustransformationen und das Doppelverhältniss.**
Der Begriff der Projektivitäten und die Erläuterung, wie sich Projektivitäten nach Wahl eines Koordinatensystems durch Möbiustransformationen darstellen lassen. Das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten im projektiven Raum. Die Beweise, dass die Definition des Doppelverhältnisses unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist.
*Literatur* [Fis92, §3.2.7–3.2.9 und 3.3.1–3.3.4].

# Literatur

[AZ18] *Aigner, M.* and *Ziegler, G.*, Das BUCH der Beweise, 5. Auflage. Springer, 2018. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7

[BEG02] Siegfried K. Berninghaus, Karl-Martin Ehrhart, and Werner Güth. *Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie.* Springer-Lehrb. Berlin: Springer, 2002.

[Wes95] D. B. West. *Introduction to Graph Theory.* Pearson (1995). https://www.pearson.com/en-us/subject-catalog/p/introduction-to-graph-theory/P200000010152/9780131437371

[Fis92] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*, volume 35 of *Vieweg Stud.* Braunschweig etc.: Friedr. Vieweg & Sohn, 6. überarb. Aufl. edition, 1992.

[Fri23] *Frick, F.*, The geometry of fair division. Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach 07/2023. https://publications.mfo.de/handle/mfo/4110

[Her18] *Hertling, C.*, Spieltheorie II – 2-stündige Vorlesung im FSS 2018. Vorlesungsskript, Mannheim, 2018.

[Su99] *Su, F. E.*, Rental Harmony: Sperner's Lemma in fair division. Amer. Math. Monthly, 106(1999), 930–942.