

Die Mathematik hinter Dobble

Die Spielregeln:

- Findet euch in Gruppen von 3 oder 4 zusammen und teilt die Karten untereinander auf (verdeckt); eine Karte wird in der Mitte aufgedeckt.

Die Spielregeln:

- Findet euch in Gruppen von 3 oder 4 zusammen und teilt die Karten untereinander auf (verdeckt); eine Karte wird in der Mitte aufgedeckt.
- Wenn alle bereits sind, deckt jeder die oberste Karte des eigenen Stapels auf.

Die Spielregeln:

- Findet euch in Gruppen von 3 oder 4 zusammen und teilt die Karten untereinander auf (verdeckt); eine Karte wird in der Mitte aufgedeckt.
- Wenn alle bereits sind, deckt jeder die oberste Karte des eigenen Stapels auf.
- Wer als erstes das gemeinsame Symbol der eigenen Karte mit der Karte in der Mitte sagt, legt diese in die Mitte und deckt eine neue Karte von seinem Stapel auf.

Die Spielregeln:

- Findet euch in Gruppen von 3 oder 4 zusammen und teilt die Karten untereinander auf (verdeckt); eine Karte wird in der Mitte aufgedeckt.
- Wenn alle bereits sind, deckt jeder die oberste Karte des eigenen Stapels auf.
- Wer als erstes das gemeinsame Symbol der eigenen Karte mit der Karte in der Mitte sagt, legt diese in die Mitte und deckt eine neue Karte von seinem Stapel auf.
- Nun suchen alle wieder das gemeinsame Symbol der eigenen Karte mit der Karte in der Mitte.

Die Spielregeln:

- Findet euch in Gruppen von 3 oder 4 zusammen und teilt die Karten untereinander auf (verdeckt); eine Karte wird in der Mitte aufgedeckt.
- Wenn alle bereits sind, deckt jeder die oberste Karte des eigenen Stapels auf.
- Wer als erstes das gemeinsame Symbol der eigenen Karte mit der Karte in der Mitte sagt, legt diese in die Mitte und deckt eine neue Karte von seinem Stapel auf.
- Nun suchen alle wieder das gemeinsame Symbol der eigenen Karte mit der Karte in der Mitte.
- Wer als erstes alle seine Karten los ist, hat gewonnen!

Was fällt auf?

- Wie viele Symbole gibt es pro Karte?
- Wie viele Karten gibt es?
- Wie viele Symbole gibt es? (Tipp: Es reicht wenn ihr alle Symbole auf Karten zählt, die einen Apfel zeigen.)
- Können alle Symbole gleich oft vorkommen?
- Was ist euch noch aufgefallen?

Was fällt auf?

- Wie viele Symbole gibt es pro Karte?

Antwort: 8

Was fällt auf?

- Wie viele Symbole gibt es pro Karte?

Antwort: 8

- Wie viele Karten gibt es?

Antwort: 55

Was fällt auf?

- Wie viele Symbole gibt es pro Karte?
Antwort: 8
- Wie viele Karten gibt es?
Antwort: 55
- Wie viele Symbole gibt es? (Tipp: Es reicht wenn ihr alle Symbole auf Karten zählt, die einen Apfel zeigen.)
Antwort: 57

Was fällt auf?

- Wie viele Symbole gibt es pro Karte?
Antwort: 8
- Wie viele Karten gibt es?
Antwort: 55
- Wie viele Symbole gibt es? (Tipp: Es reicht wenn ihr alle Symbole auf Karten zählt, die einen Apfel zeigen.)
Antwort: 57
- Können alle Symbole gleich oft vorkommen?
Antwort: Nein, denn $55 \cdot 8 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$ ist nicht durch $57 = 3 \cdot 19$ teilbar.

Die Dobble-Symbole

Grüne Symbole:

Kaktus 7
Schildkröte 8
Fragezeichen 7
Dino 7
Baum 8
Apfel 8
Kleeblatt 8
Farbkleise 8

Rote Symbole:

Clown 8
Lippen 8
Herz 8
Straßenschild
Marienkäfer 7
Feuer 8
Fadenkreuz 8
Ahornblatt 7

Lila Symbole:

Spinnennetz 8
Auge 7
Drache 8
Vogel 8
Katze 8
Schere 8
Kerze 8
Dobble 8
**Schwarze
Symbole:**
Zebra 8
Vorhängeschloss 8
Bombe 8
Ying-Yang 8
Springer 8
Sonnenbrille 8
Spinne 8
Totenkopf 7

Gelbe Symbole:

Sonne 8
Käse 8
Blitz 8
Glühbirne 7
Blume 7
Hund 7
Mond 8
Ausrufezeichen 7

Blaue Symbole:

Schneeflocke 8
Schneemann 6
Stift 8
Eiswürfel 7
Geist 8
Delfin 8
Wassertropfen 8
Iglu 8

Orange Symbole:

Fläschchen 8
Notenschlüssel 8
Uhr 8
Hammer 7
Schlüssel 8
Auto 8
Möhre 8
Anker 8
Mensch 7

Definition:

Als ein ideales Dobble-Spiel definieren wir eine Menge von Karten mit Symbolen darauf, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Alle Karten haben gleich viele Symbole.

Definition:

Als ein ideales Dobble-Spiel definieren wir eine Menge von Karten mit Symbolen darauf, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Alle Karten haben gleich viele Symbole.
- Jedes Symbol kommt gleich häufig vor.

Definition:

Als ein ideales Dobble-Spiel definieren wir eine Menge von Karten mit Symbolen darauf, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Alle Karten haben gleich viele Symbole.
- Jedes Symbol kommt gleich häufig vor.
- Zwei verschiedene Karten haben genau ein Symbol gemeinsam.

Definition:

Als ein ideales Dobble-Spiel definieren wir eine Menge von Karten mit Symbolen darauf, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Alle Karten haben gleich viele Symbole.
- Jedes Symbol kommt gleich häufig vor.
- Zwei verschiedene Karten haben genau ein Symbol gemeinsam.
- Für zwei verschiedene Symbole gibt es genau ein Karte, auf der diese beiden Symbole zu sehen sind.

Lemma ('Hilfssatz'):

Für ein ideales Dobble-Spiel gilt:

- Die Anzahl der Symbole auf einer Karte entspricht der Häufigkeit der Symbole.
- Die Anzahl der verschiedenen Symbole entspricht der Anzahl der Karten im gesamten Spiel.

Wenn wir ein Dobble-Spiel mit n Symbolen auf jeder Karte erstellen wollen, wie viele Karten brauchen wir?

Satz

Für ein ideales Dobble-Spiel mit n Symbole pro Karte braucht man $n \cdot (n - 1) + 1$ Karten.

Findet euch wieder in Gruppen zusammen und erstellt euer eigenes Dobble-Spiel, bei dem auf jeder Karte drei Symbole sind!

Wenn ihr fertig seid:

- Wie seid ihr vorgegangen?
- Lässt sich euer Ansatz auch für mehr Symbole verwenden?
- Wie könnte man dann vorgehen?

Ideales Dobble-Spiel:

- Je zwei Karten haben genau ein Symbol gemeinsam
- Je zwei Symbole sind auf genau einer Karte zusammen zu sehen.

Analogie:

Geometrie:

Ideales Dobble-Spiel:

- Je zwei Karten haben genau ein Symbol gemeinsam
- Je zwei Symbole sind auf genau einer Karte zusammen zu sehen.

Analogie:

Symbol \longleftrightarrow *Gerade*, *Karte* \longleftrightarrow *Punkt*

Geometrie:

Ideales Dobble-Spiel:

- Je zwei Karten haben genau ein Symbol gemeinsam
- Je zwei Symbole sind auf genau einer Karte zusammen zu sehen.

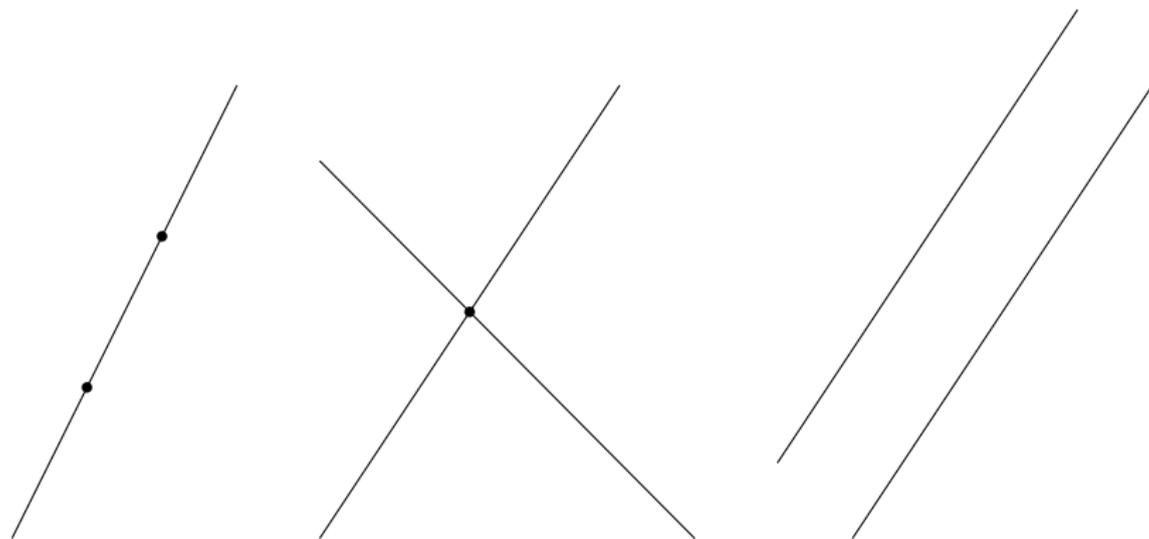
Analogie:

Symbol \longleftrightarrow *Gerade*, *Karte* \longleftrightarrow *Punkt*

Geometrie:

- Je zwei Punkte beschreiben genau eine Gerade.
- Zwei verschiedene Geraden beschreiben genau einen Punkt.

- Durch zwei verschiedene Punkte verläuft genau eine Gerade.
- Zwei nicht-parallele, verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- Zwei parallele Geraden schneiden sich nie.

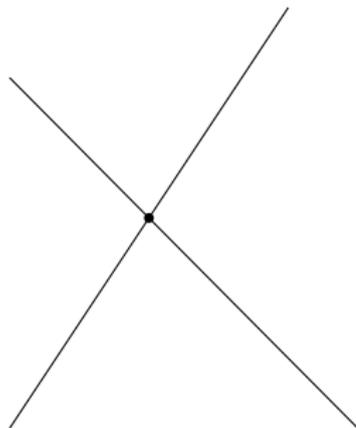
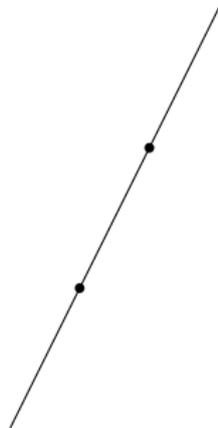




Parallele Geraden, die sich vermeintlich schneiden¹

¹<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2a/Railroad-Tracks-Perspective.jpg> 23.06.2024,18:13

- Durch zwei verschiedene Punkte, verläuft genau eine Gerade
- Zwei verschiedene Geraden haben genau einen Schnittpunkt.



Achtung: Auch parallele Geraden haben nun einen Schnittpunkt.
Wir sagen, dass sich zwei Geraden im "Unendlichen" schneiden.



Definition(Projektive Ebene)

Eine projektive Ebene kann aus unendlichen vielen oder nur endlich vielen Punkten bestehen.

Eine projektive Ebene der **Ordnung** $n - 1$ hat folgende Eigenschaften:

- Zwei verschiedene Punkte beschreiben genau eine Gerade.
- Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem genau einen Punkt.
- Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht alle auf der gleichen Gerade liegen.
- Es gibt genau n Geraden, die sich in einem Punkt schneiden.

Satz:

Eine projektive Ebene der Ordnung $n - 1$ besteht aus genau $n \cdot (n - 1) + 1$ Punkten und $n \cdot (n - 1) + 1$ Geraden.

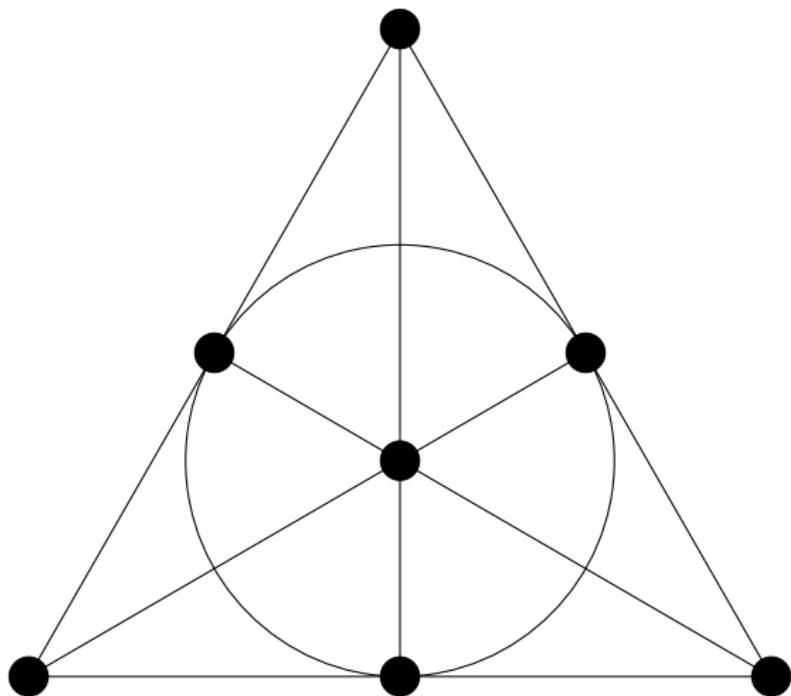
Erinnerung:

Symbol \longleftrightarrow *Gerade*, *Karte* \longleftrightarrow *Punkt*

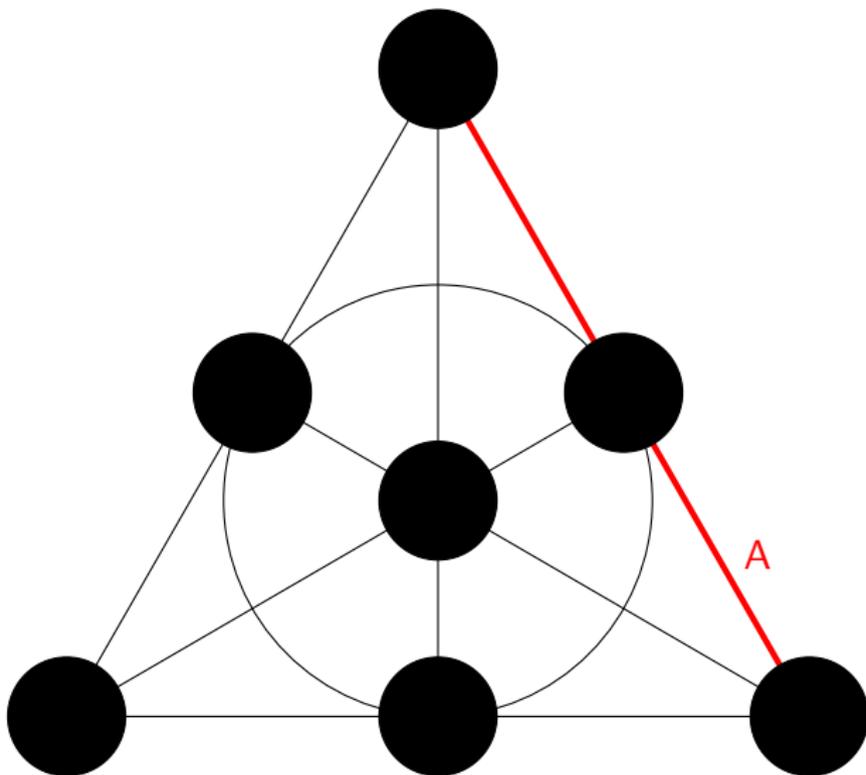
Frage:

Die projektive Ebene welcher Ordnung müssen wir uns anschauen, damit wir ein Dobble-Spiel mit 3 Symbolen pro Karte basteln können?

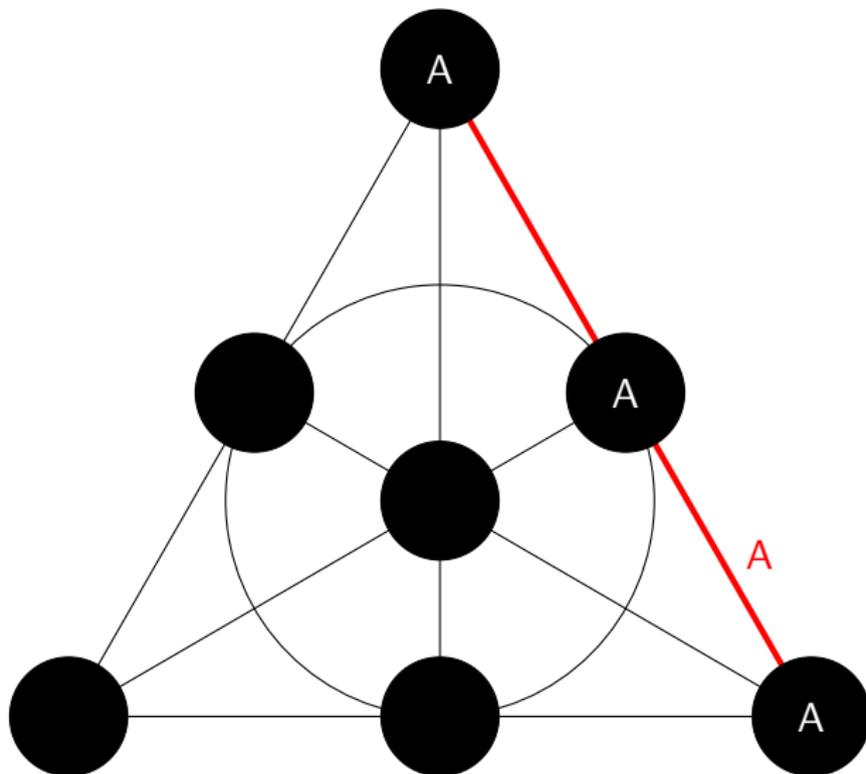
Die Fano-Ebene



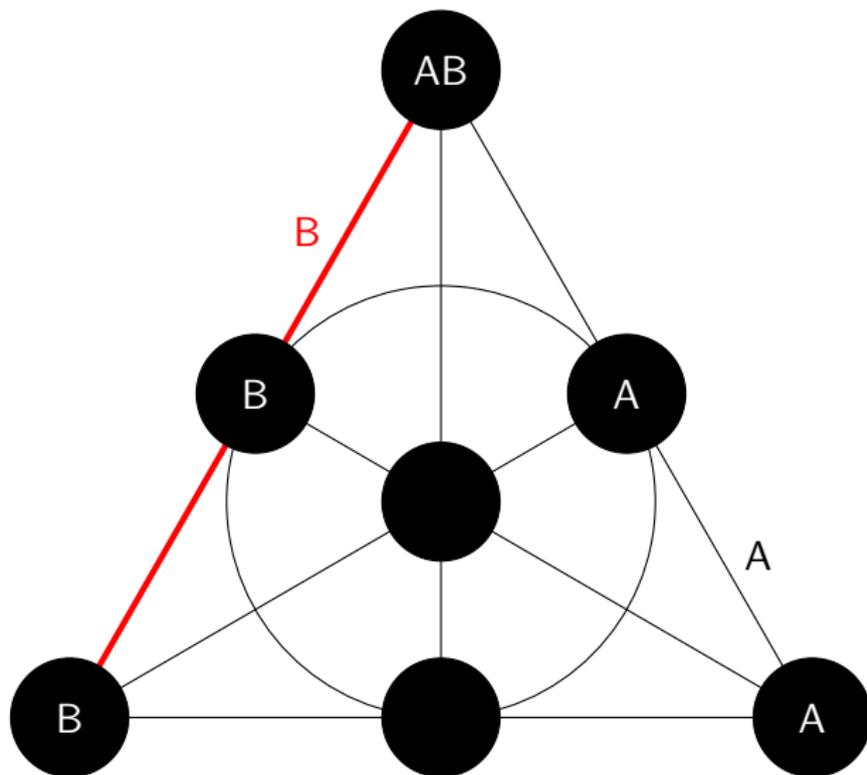
Welche Karten gibt es?



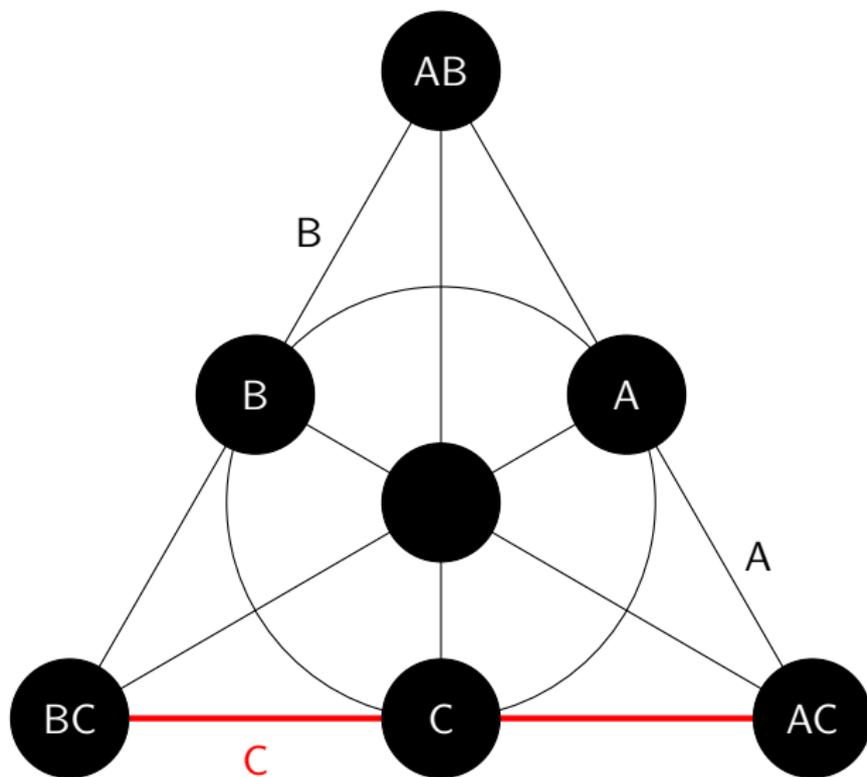
Welche Karten gibt es?



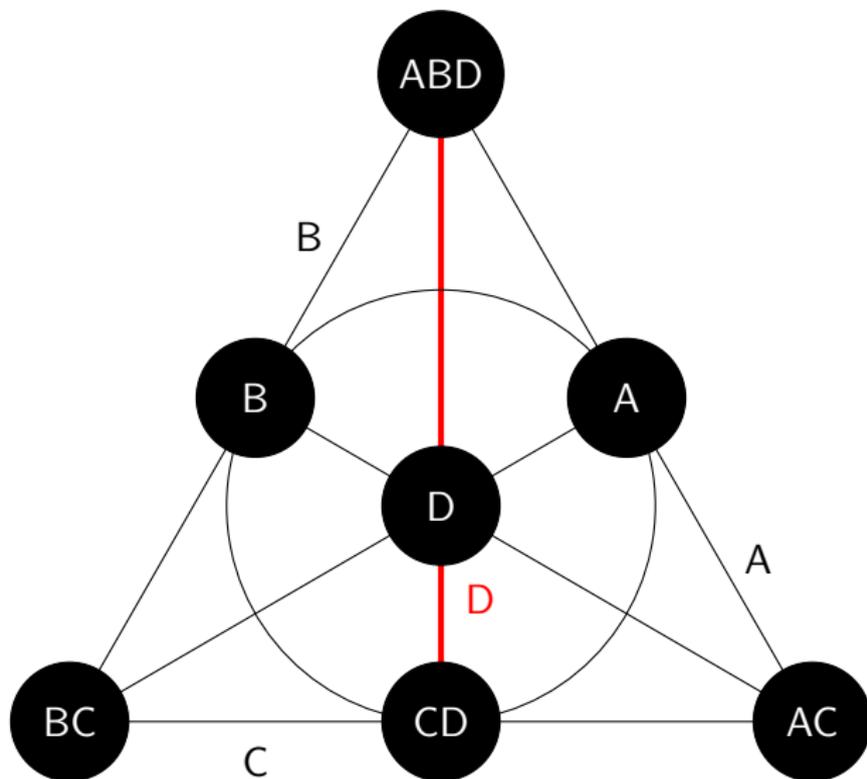
Welche Karten gibt es?



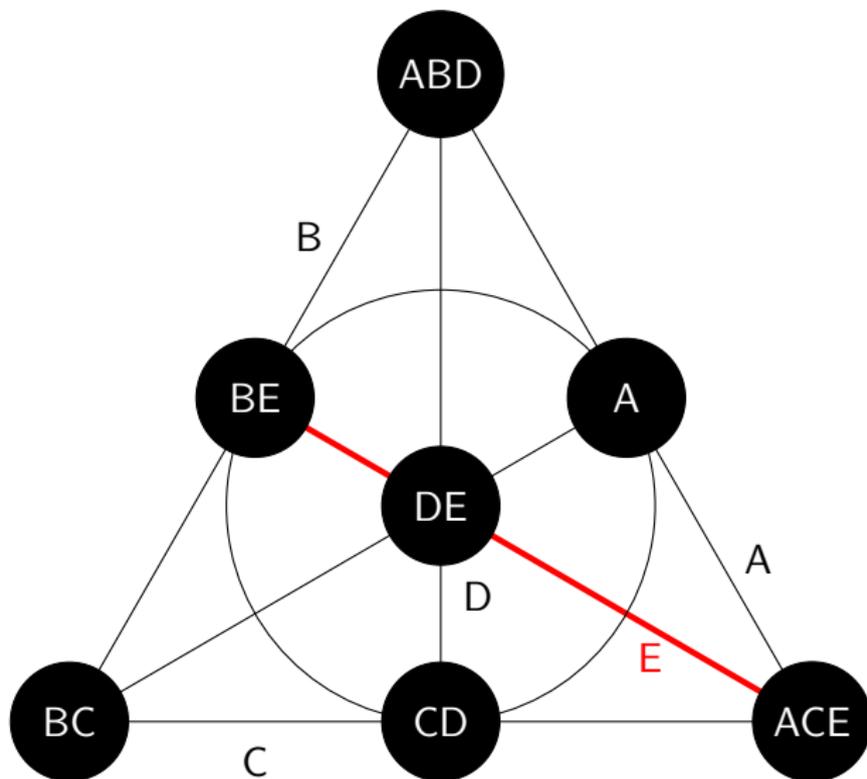
Welche Karten gibt es?



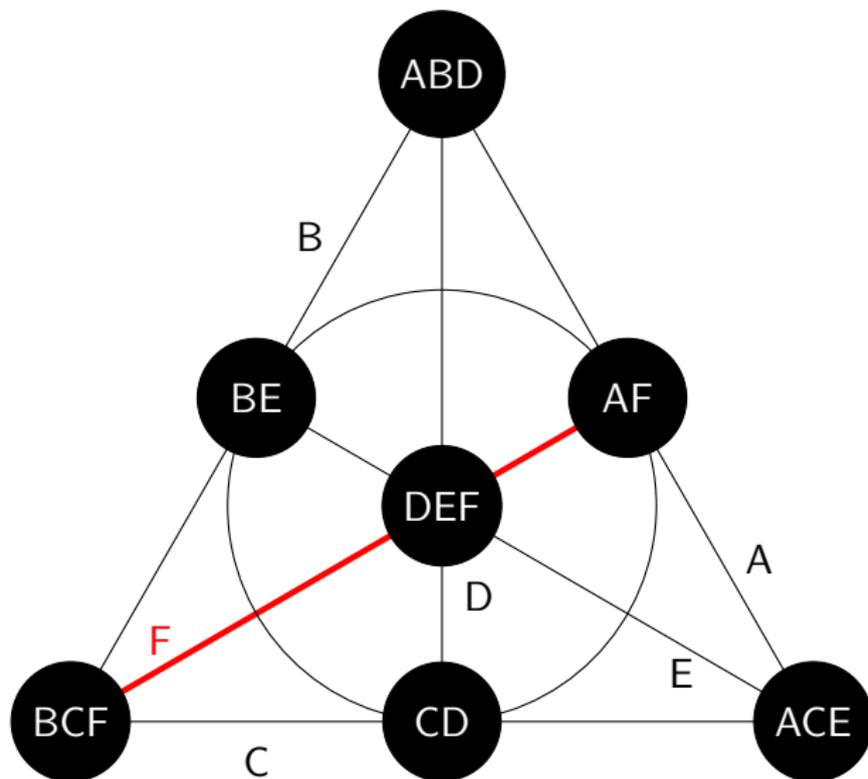
Welche Karten gibt es?



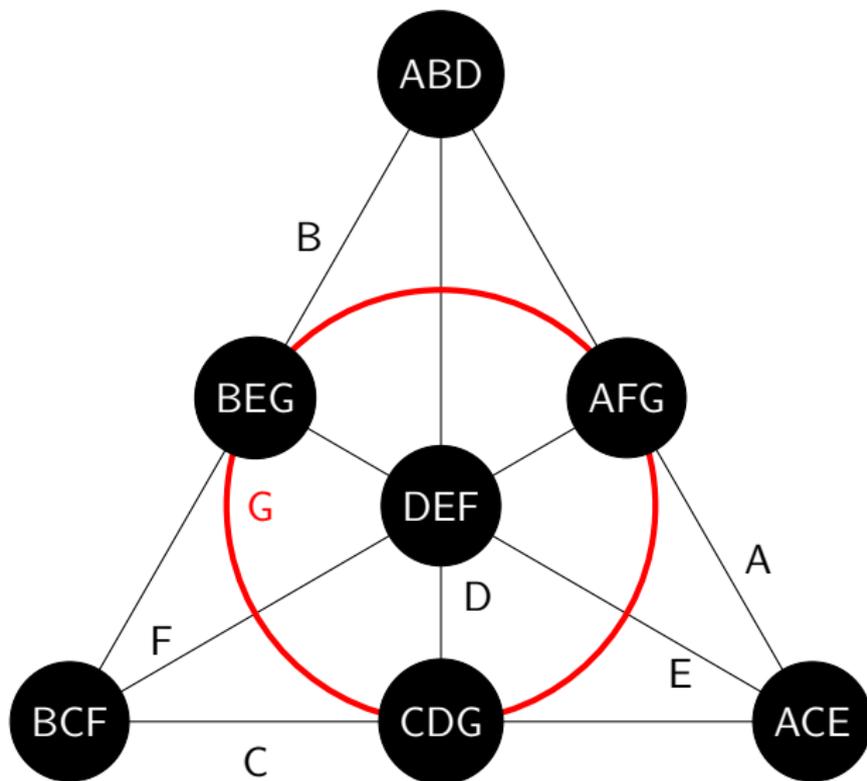
Welche Karten gibt es?



Welche Karten gibt es?



Welche Karten gibt es?



- Für die Konstruktion eines eigenen (idealen) Dobble-Spiels kann die Projektive Geometrie genutzt werden.

- Für die Konstruktion eines eigenen (idealen) Dobble-Spiels kann die Projektive Geometrie genutzt werden.
- Frage, mit der sich Mathematiker:innen auseinander setzen:
Kann so ein Dobble-Spiel für jede Anzahl an Symbolen pro Karte gefunden werden? (Gibt es eine projektive Ebene der Ordnung $n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$?)

- Für die Konstruktion eines eigenen (idealen) Dobble-Spiels kann die Projektive Geometrie genutzt werden.
- Frage, mit der sich Mathematiker:innen auseinander setzen:
Kann so ein Dobble-Spiel für jede Anzahl an Symbolen pro Karte gefunden werden? (Gibt es eine projektive Ebene der Ordnung $n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$?)
- **Antwort:** Nein, für beispielsweise 7 oder 11 Symbole pro Karte kann es solche Spiele nicht geben. (Das wurde schon bewiesen!)

- Für die Konstruktion eines eigenen (idealen) Dobble-Spiels kann die Projektive Geometrie genutzt werden.
- Frage, mit der sich Mathematiker:innen auseinander setzen:
Kann so ein Dobble-Spiel für jede Anzahl an Symbolen pro Karte gefunden werden? (Gibt es eine projektive Ebene der Ordnung $n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$?)
- **Antwort:** Nein, für beispielsweise 7 oder 11 Symbole pro Karte kann es solche Spiele nicht geben. (Das wurde schon bewiesen!)

Offenes Problem:

Offenes Problem: Gibt es ein Spiel mit 13 Symbolen pro Karte (Projektive Ebene der Ordnung 12)?