

# Stationsarbeit Graphentheorie für SuS

**Zielgruppe:** Jahrgangsstufe 7-8

**Zeitlicher Umfang:** ca. 45 Minuten

**Optimale Gruppengröße:** 15-30 SuS

**Benötigtes Material:** je ein AB für die Stationen 1, 3 und zwei AB für Station 2 (angehängt), Buntstifte in mindestens 5-6 verschiedenen Farben

Wir haben eine Stationsarbeit konzipiert, die SuS die Grundlagen der Graphentheorie anschaulich und beispielorientiert näherbringen soll. Die SuS sollen (einfache) graphentheoretische Definitionen und Sätze (Knotengrad, planarer Graph, Eulerformel, Vier-Farben-Satz) durch Ausprobieren kennenlernen und anwenden.

Folgender Ablauf ist vorgesehen: Nach einer kurzen gemeinsamen Einführung in die Thematik im Plenum sollen drei Gruppen gebildet und auf drei Stationen aufgeteilt werden. Nach jeweils zehn Minuten wird die Station gewechselt, sodass alle SuS am Ende jede Station bearbeitet haben. Die Stationen bauen nicht aufeinander auf, sodass die Reihenfolge des Wechsels keine Rolle spielt und es für die Durchführung der Stationsarbeit in einem kürzeren Zeitfenster auch genügt, jede Gruppe nur zwei Stationen bearbeiten zu lassen. Abschließend werden die Ergebnisse wieder im Plenum reflektiert.

Die Stationsarbeit kann sowohl als Workshop bei einem Aktionstag, als auch im Rahmen einer Unterrichtsstunde durchgeführt werden. Die Arbeitsblätter sind selbsterklärend gestaltet, es ist aber von Vorteil, wenn mindestens eine Betreuungsperson pro Station zur Verfügung steht. Alternativ muss ggf. in der Einführung auf die einzelnen Arbeitsblätter eingegangen und dafür mehr Zeit eingeplant werden.

## **Hinweise zum Ablauf:**

**Einführung:** Was ist ein Graph? (5 Minuten)

### Inhalt und Konzept:

Im Plenum werden zunächst mündlich (nach Bedarf mit Beispielen an der Tafel) grundlegende Begriffe der Graphentheorie erklärt.

- Ein Graph kann als eine "Aneinanderreihung von Knoten (dicke Punkte) und Kanten (Verbindung der Punkte) dargestellt werden" (Lehrkraft kann Beispiel an Tafel zeichnen)
- Graphen werden genutzt, um Zusammenhänge und Zuordnungen zu veranschaulichen (Beispiel: Darstellung Zugnetz, Kanten sind die Verbindungen, Knoten die Städte)
- je nach Verständnis: kleine gemeinsame Aufgabe: Lehrkraft zeichnet Graphen, SuS identifizieren / zählen Knoten und Kanten

Ziel: SuS können sicher mit den Begriffen Knoten und Kanten umgehen.

*Im Folgenden werden die Stationen näher erklärt. Die "Ergebnisfragen" dienen zur mündlichen Festigung des Wissens am Ende der Station, können aber auch für eine Ergebnissicherung am Ende der ganzen Einheit genutzt werden.*

## **Station 1:** Knotengrade (10 Minuten)

### Inhalt und Konzept:

- Definition des Knotengrads anhand eines Beispiels veranschaulichen (1 min)
- Selbst weitere Beispiele finden (Teilaufgaben b-e). Durch Ausprobieren selbst herausfinden, dass es Schleifen und Mehrfachkanten gibt (6 min)
- Zusammenhang zwischen Kanten und Knotengrad beobachten + verstehen (3 min)

### Lösungen für die Lücken:

sich selbst, Schleife, gleichen beiden, Mehrfachkanten,  $2x$  / doppelt,  $4+5+6=15$  ist ungerade. Die Summe der Knotengrade eines Graphen muss immer gerade sein.

### Ergebnis:

Was ist der Knotengrad? Wie hängt er mit der Anzahl der Kanten zusammen? Was sind Schleifen und Mehrfachkanten?

## **Station 2:** Planare Graphen und Eulerformel (10 Minuten)

Hinweis: erst AB1 fertig bearbeiten, dann AB2 austeilen. AB2 enthält Lösung von AB1

### Inhalt und Konzept:

#### AB 1:

- Einführung (1 min): SuS lernen eine bestimmte Art von Graphen kennen, "planare Graphen"
- Aufgabe 1 (3 min): Vermittelt das Verständnis der Eigenschaft, dass man diese auf einem Blatt Papier ohne kreuzende Kanten zeichnen kann, indem die SuS "Knoten bewegen", bis der Graph sichtlich planar ist.

#### AB 2:

- Vorstellung Eulerformel (2 min). Das Ziel dieser ist, mit nur einer Rechnung zeigen zu können, dass Graphen planar sind. Zunächst wird die Eulerformel und der Begriff "Gebiet" eingeführt
- Aufgabe 2 (4 min): Eulerformel selbst anwenden. Das erste Beispiel sollte gemeinsam bearbeitet werden. Danach sollen die SuS nach folgendem Schema vorgehen: 1. Größen zählen, 2. Größen einsetzen, 3. Ausrechnen  
Die verwendeten Graphen sind gleichzeitig die Lösung der Aufgabe 1 und können dadurch als Selbstkontrolle eingesetzt werden

### Ergebnis:

Was ist ein planarer Graph? Wie benutze ich die Eulerformel?

## **Station 3:** Graphen und Landkarten (10 Minuten)

### Inhalt und Konzept:

Arbeitsauftrag 1 (3 min.): Wie wird ein Graph zu einer Landkarte?

- Schülernahes Beispiel durch Anwendung auf Deutschland und seine Nachbarländer
- Lehrkraft tritt beobachtend auf und gibt Hilfestellung (insbesondere bei neu eingeführten Begriffen Knoten und Kanten) wenn nötig.
- Lehrkraft begleitet Sicherstellung der Ergebnisse in Lückentext

Arbeitsauftrag 2 (7 min): Wie viele Farben benötigt man, um eine Landkarte so auszumalen, dass immer zwei sich berührende Länder eine unterschiedliche Farbe besitzen?

- Ausprobieren durch ausmalen
  - Lehrkraft begleitet durch eventuelle Hilfestellung, aufzeigen von Problemen wenn SuS mehr als 4 Farben benötigen.
- Zwei Deutschlandkarten auf dem Arbeitsblatt dienen der Differenzierung:

- Bei Problemen können die SuS bei der zweiten Deutschlandkarte noch einmal von vorne anfangen, sie können so sich selbst und ihren Fehler reflektieren
- Besonders schnelle SuS können den Arbeitsauftrag bekommen, zu testen, ob eine weitere gültige Färbung existiert.
- Mitgabe weiterer Kopien, damit SuS bei Problemen auch nach der Stationsarbeit an einer möglichen gültigen Färbung arbeiten können

### Ergebnis:

Was haben Landkarten und Graphen miteinander zu tun? Wie viele Farben braucht man höchstens, um eine beliebige Karte so zu färben, dass zwei aneinander angrenzende unterschiedlich gefärbt sind?

### **Abschluss (5 Minuten)**

#### Inhalt und Konzept:

Im Plenum:

- Aufforderung an die SuS das Gelernte kurz zu sammeln (1 min)
  - (s. Ergebnisse der einzelnen Stationen)
- Alltagsbeispiele vorstellen (4 min)
  - auf das in der Einführung genutzte Beispiel Zugnetz wird näher eingegangen (andere Bsp. natürlich auch möglich)
  - Illustration von Zugnetz ("Kanten") und Städten ("Knoten") (an der Tafel, mit Beamer, mit Overheadprojektor) und Zeitangabe/ Längenangabe wie lange einzelne Verbindungsstrecken dauern
  - Zeigen, dass man über die Kanten (Schienen) auf mehrere Wege von einer Stadt zur anderen kommen kann
  - Frage an die Schüler\*innen: Welcher Weg ist der effizienteste ("schnellste")?
    - Beispiel DB App: Routenplaner findet den schnellsten Weg.

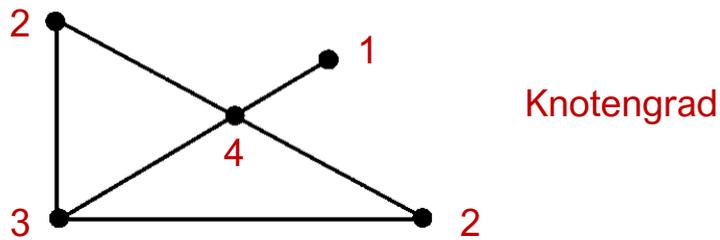
## Station 1: Knotengrade

Der **Grad eines Knotens** ist die Anzahl der anschließenden Kanten.

### Aufgabe 1:

- a) Zeichne einen Graphen mit 5 Knoten mit Grad 1, 2, 2, 3, 4

*Beispiel:*



- b) Zeichne einen Graphen mit 4 Knoten mit Grad 1, 1, 2, 2

- c) Zeichne einen Graphen mit 5 Knoten mit Grad 1, 2, 2, 2, 3

- d) Zeichne einen Graphen mit 2 Knoten mit Grad 1 und 3

Eine Kante, die einen Knoten mit \_\_\_\_\_ verbindet, heißt \_\_\_\_\_.

e) Zeichne einen Graphen mit 3 Knoten mit Grad 2, 3, 3

Kanten, die jeweils die \_\_\_\_\_ Knoten miteinander verbinden heißen \_\_\_\_\_.

**Aufgabe 2:**

a) Trage die Summe der Knotengrade und die Anzahl der Kanten aus den Teilaufgaben b) – e) in die Tabelle ein:

	a)	b)	c)	d)	e)
Summe der Knotengrade	12				
Anzahl der Kanten	6				

Wie hängt die Summe der Knotengrade mit der Anzahl der Knoten zusammen?

**Antwort:** Die Summe der Knotengrade ist immer \_\_\_\_\_ so groß wie die Anzahl der Kanten.

b) Warum gibt es keinen Graphen mit 3 Knoten mit Grad 4, 5, 6?

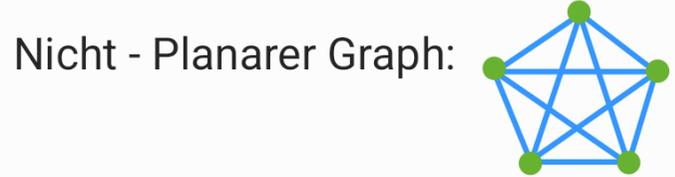
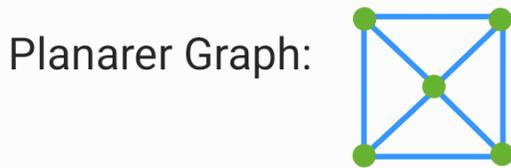
**Antwort:**

---

---

## Station 2: Planare Graphen

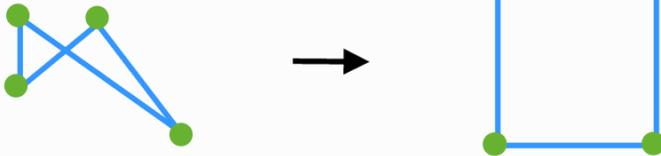
In der Graphentheorie gibt es viele verschiedene Arten von Graphen. Eine Art sind die **planaren Graphen**. Sie haben die Eigenschaft, dass man sie auf einem Blatt Papier zeichnen kann, ohne dass sie sich **Kanten** kreuzen.



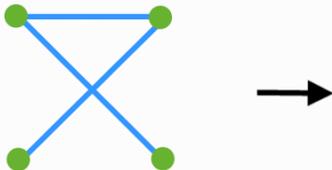
Bei dieser Station möchten wir zeigen, dass einzelne Graphen planar sind.

**Aufgabe 1** "Verschiebe" die **Knoten** so, dass sich keine **Kanten** kreuzen!

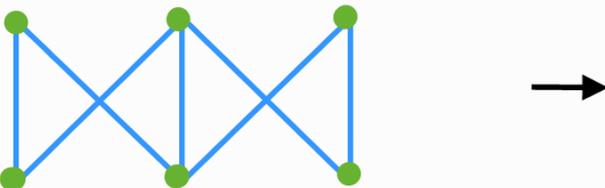
*Beispiel:*



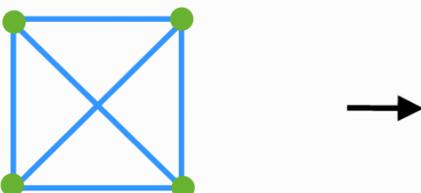
a)



b)



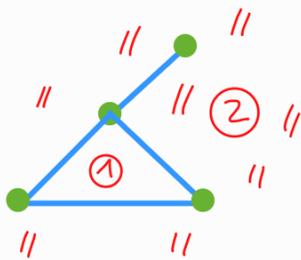
c)



Man kann auch rechnerisch zeigen, dass ein Graph planar ist. Dazu brauchen wir zunächst die Anzahl der **Knoten**, die Anzahl der **Kanten** und die Anzahl der **Gebiete**. Ein Gebiet ist eine vollständig von Kanten umschlossene Fläche. Das äußere, "unbegrenzte" Gebiet wird ebenfalls mitgezählt.

Die Rechnung lautet: **Knoten** - **Kanten** + **Gebiete** = 2 und wird auch **Eulerformel** genannt.

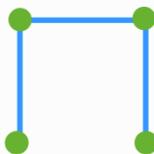
*Beispiel: Dieser Graph hat 4 Kanten, 4 Gebiete und 2 Gebiete.*

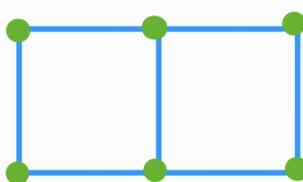


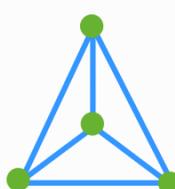
Rechnung:  $4 - 4 + 2 = 2$

**Aufgabe 2** Zeige mit den folgenden Schritten, dass die Graphen aus Aufgabe 1 planar sind.

1. Größen zählen
2. Größen in die Formel eintragen
3. Ausrechnen und Ergebnis vergleichen

a)  \_\_ Knoten Rechnung:  
\_\_ Kanten  
\_\_ Gebiete

b)  \_\_ Knoten Rechnung:  
\_\_ Kanten  
\_\_ Gebiete

c)  \_\_ Knoten Rechnung:  
\_\_ Kanten  
\_\_ Gebiete

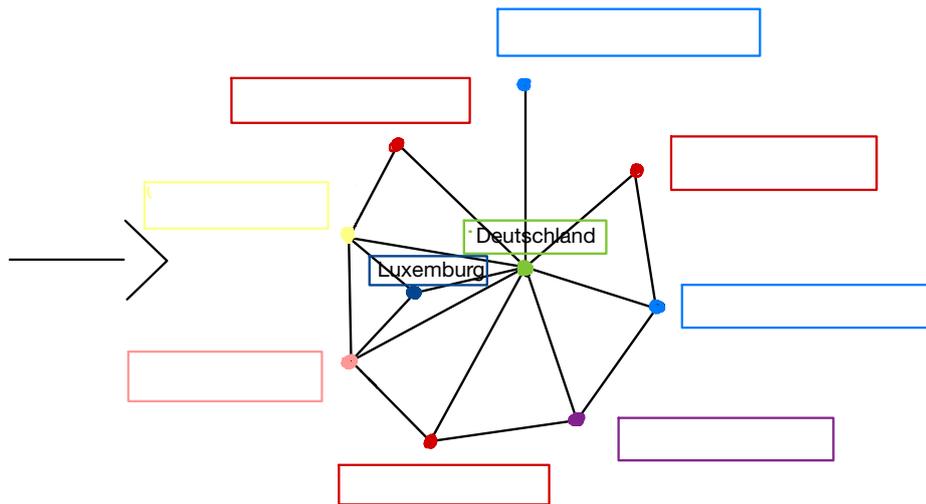
# Station 3: Graphen und Landkarten

## 1. Wie wird die Landkarte zu einem Graphen?

Beschrifte dazu die Knoten im Graphen mit den Nachbarländern von Deutschland.



Landkarte



Graph

**Antwort:** Wenn eine **Landkarte** zu einem **Graphen** wird, dann werden die Länder zu \_\_\_\_\_ und die Grenzen zwischen den Ländern zu den \_\_\_\_\_ zwischen den Knoten.

## 2. Wie viele Farben braucht man höchstens, um eine Landkarte so auszumalen, dass immer zwei sich berührende Länder eine unterschiedliche Farbe besitzen?

**Aufgabe:** Nimm dir **Buntstifte** und probiere aus, am Beispiel der **Deutschlandkarten** eine Landkarte mit so **wenigen Farben** wie möglich auszumalen, sodass zwei Bundesländer, die sich berühren, eine unterschiedliche Farbe besitzen.



**Antwort:** Man benötigt mindestens \_\_\_\_ Farben, um eine beliebige Landkarte so zu färben, dass zwei benachbarte Länder unterschiedlich gefärbt sind.