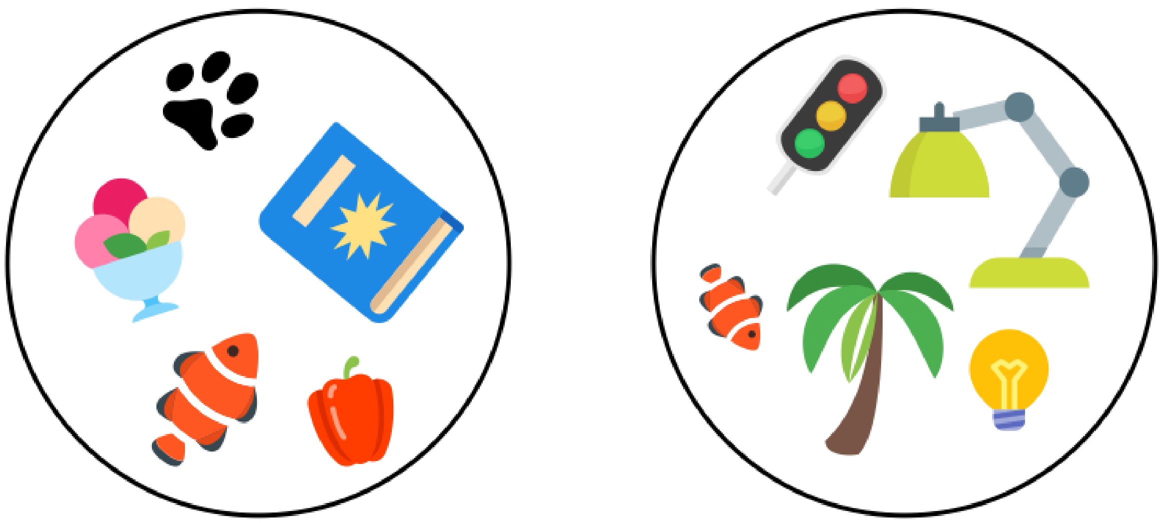
Workshop zur Mathematik hinter dem Spiel Dobble

Hannah Gebhardt, Solveig Harder, Hannah Renner

Juli 2024



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser kleine Workshop ist im Rahmen des HEGL-Seminars „Mathematik unterrichten“ im Sommersemester 2024 an der Universität Heidelberg entstanden. Nachdem wir uns mit der projektiven Geometrie auseinandergesetzt hatten, sollten wir nun ein Projekt für die Schule zum Spiel „Dobble“, das auf der Mathematik der projektiven Geometrie beruht, ausgestalten. Der Workshop wurde im Juli 2024 mit einer neunten Klasse durchgeführt und dauerte etwa drei Stunden, allerdings kann die Zeit für Pausen und die Bearbeitung der Arbeitsblätter variiert werden.

Unser Ziel des Workshops war es nicht nur den Schülerinnen und Schülern das Spiel Dobble mathematisch näherzubringen, sondern auch zu zeigen wie man im Bereich der Mathematik an Universitäten o.Ä. arbeitet. Dafür haben wir versucht die Mathematik aus einer Alltagsfrage (Wie können wir ein eigenes Dobble-Spiel entwerfen?) zu motivieren und grundlegende Elemente, die einem in der universitären Mathematik begegnen, wie einen Gewissen Grad der Abstraktion, Definitionen, Sätze und Lemmata und natürlich Beweise, den Schüler:innen näher zu bringen.

2 Inhalt

Der Workshop besteht einerseits aus einer Präsentation, die für die Durchführung geeignet ist, andererseits auch aus Materialien, mit denen die Schüler:innen das Thema bearbeiten und vertiefen können. Wir haben im Raum Gruppentische für jeweils drei bis vier Schüler:innen aufgebaut, in denen die Gruppenaktionen stattfanden. Neben der Präsentation und den Arbeitsblättern werden noch

- genügend Dobble-Spiele für die Klasse
- leere Karten für die Erstellung des eigenen Dobble-Spiels (mindestens 7 pro Gruppe)
- Faden für die Fano-Ebene der erstellen Dobble-Spiele

benötigt.

2.1 Die Präsentation

Während der Präsentation gibt es immer wieder interaktive Phasen, in denen sich die Schüler:innen selbst mit dem zuvor besprochenen auseinandersetzen können:

- Nach Folie 2: Die Schüler:innen haben etwa 15 Minuten Zeit um das Spiel selbst auszuprobieren.
- Nach Folie 3: Die Schüler:innen haben nochmal etwa fünf Minuten Zeit, um sich in der Gruppe mit den Fragen zu beschäftigen.
- Nach Folie 7: Beweis des Lemmas wird an der Tafel geführt, aber immer wieder Fragen an die Schüler:innen zum weiteren Vorgehen.
- Nach Folie 8: Beweis des Satzes wird an der Tafel geführt, aber immer wieder Fragen an die Schüler:innen zum weiteren Vorgehen.
  Anschließend: Wie viele Karten und Symbole braucht man nun also um ein Dobble-Spiel mit 3 Symbolen pro Karte zu erstellen?
- Nach Folie 9: Die Schüler:innen haben Zeit um innerhalb der Gruppe ihr eigenes Dobble-Spiel zu basteln. Die Zeit dafür kann variiert werden.
- Nach Folie 17: Die Schüler:innen haben kurz Zeit sich über die Frage Gedanken zu machen.
  Anschließend: Konstruktion der Fano-Ebene mit Hilfe der Schüler:innen.
- Nach Folie 26: Schüler:innen haben Zeit zur Bearbeitung der Arbeitsblätter.

2.2 Die Arbeitsblätter

Für den Workshop haben wir ein Handout erstellt, dass die Schüler:innen während der Präsentation ausfüllen können.

Für die freie Arbeitszeit haben wir zwei Arbeitsblätter erstellt, die einerseits das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie spielerisch behandeln, andererseits die Konstruktion eines Dobble-Spiels mit vier Symbolen pro Karte mit Hilfe der projektiven Ebene der Ordnung 3 anleitet. Es standen außerdem weitere Arbeitsblätter zum projektiven Zeichnen, zur kombinatorischen Konstruktion eines Dobble-Spiel mit drei Symbolen und zu einem abstrakteren Beweis in der projektiven Ebene zur Verfügung.
Weitere Arbeitsblätter und weitere mathematische Workshops können unter der e-Mail-Adresse *workshops.geodyn@mathi.uni-heidelberg.de* angefragt werden.

2.3 Die Beweise und Konstruktion der Fano-Ebene

2.3.1 Beweis des Lemmas:

Teil 1:

zz.: Anzahl der Symbole pro Karte = Häufigkeit der Symbole => Achtung‼ => nur im idealen Dobble-Spiel

2 Schritte: a) $m \geq h$; b) $m > h$ führt zu Widerspruch

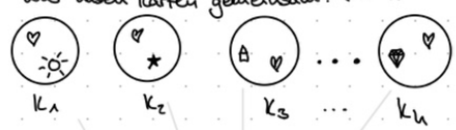
Wir definieren: $m \hat{=}$ Anzahl der Symbole pro Karte ; $h \hat{=}$ Häufigkeit der Symbole

$m > 1$ (sonst gemeinsame Symbole sinnlos)

Wir stellen uns vor, wir haben ein ideales Dobble-Spiel und suchen alle Karten heraus, auf denen ein bestimmtes Symbol vorkommt (z.B. ♡)

↳ Wie viele Karten finden wir? (-> darauf eingehen, dass wir allgemeinen Fall betrachten (nicht 8 Symbole) => h Karten

Was haben Karten gemeinsam? (das ♡)



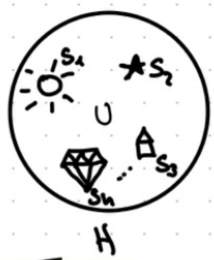
Wir nehmen uns eine weitere Karte H, die nicht in $K_1, \dots, K_h$ vorkommt. Warum muss es diese geben?

Was wissen wir über die Karte H aus den Dobble-Regeln?

=> muss mit Karten K_1-K_h je ein Symbol gemeinsam haben

Wie viele verschiedene Symbole müssen wir auf H haben? => $m \geq h$ -> nach weiterem Symbol fragen

Kann $m > h$ sein?



Wo finden wir U auf Karten $K_1, \dots, K_h$? => nirgends!

=> Es gibt keine Karte, auf denen sowohl U als auch ♡ vorkommen.

↳ Widerspricht der Regel, dass je zwei Symbole immer genau eine Karte definieren => $m > h$ ↯

=> $m = h$

Teil 2:

zz.: Anzahl der verschiedenen Symbole = Anzahl der Karten

Wir definieren: $s \hat{=}$ Anzahl der verschiedenen Symbole ; $k \hat{=}$ Anzahl der Karten

Außerdem betrachten wir die Gesamtzahl aller Symbole z:

Wie können wir z berechnen?

I $z = m \cdot k$ Wie können wir den 1. Teil nutzen? => $m = h$

II $z = h \cdot s$

=> $k = s$

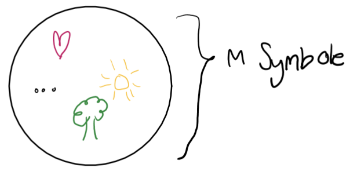
□

2.3.2 Beweis des Satzes:

Frage: Wie viele Karten hat ein Dobble Spiel?

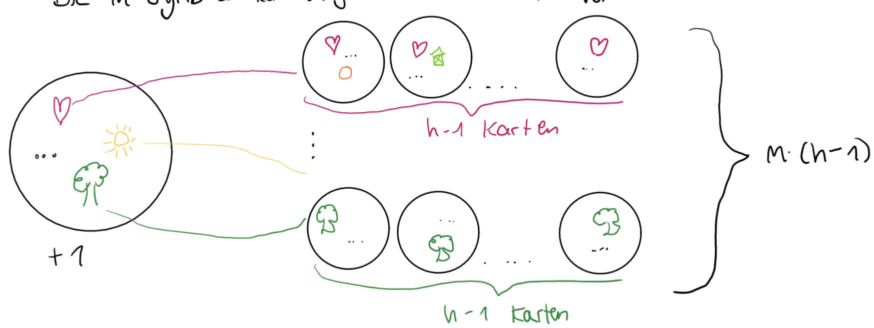
Variablen: $m :=$ Anzahl der Symbole pro Karte

$h :=$ Häufigkeit der Symbole



Vorher gezeigt: Es gilt $m = h$

$\Rightarrow$ Die m Symbole kommen jeweils auf h Karten vor



Insgesamt: Anzahl $= m\cdot(h-1)+1 = m\cdot(m-1)+1$

für unser Dobble Spiel mit 8 Symbolen: $8\cdot(8-1)+1 = 57$ Karten

$\rightsquigarrow$ im "echten Spiel" nur 55, das könnte an der Karten-Druckerei liegen

2.3.3 Konstruktion der Fano-Ebene:

Konstruktion Fano-Ebene

1 Wir starten mit vier Punkten in einem Viereck. Da je zwei Punkte auf einer gemeinsamen Gerade liegen, können wir damit beginnen, die oberen bzw. unteren Punkte horizontal zu verbinden.

2 Da sich zwei parallele Geraden im unendlichen schneiden, konstruieren wir einen Schnittpunkt der blauen und grünen Gerade (hier muss man darauf eingehen, dass durch die Darstellung im Endlichen die Geraden nicht mehr „gerade" sind.

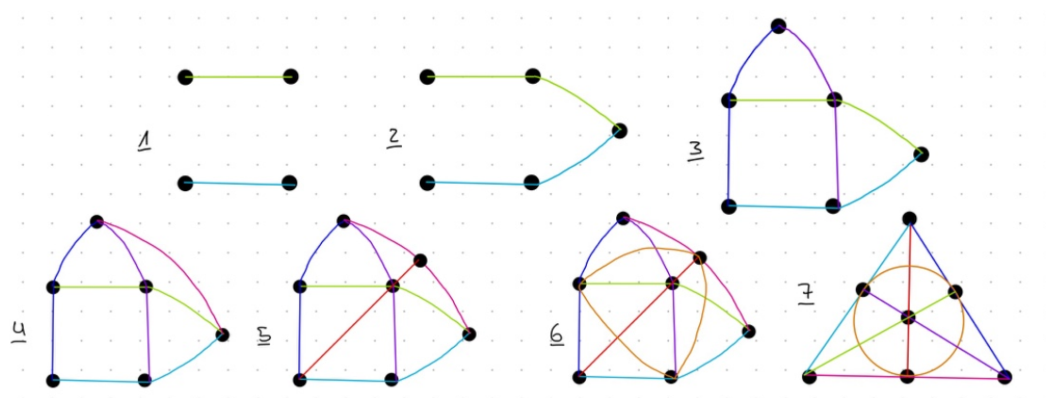
3 Die gleichen Schritte können wir für die vertikalen Verbindungsgeraden der ersten vier Punkte wiederholen.

4 Im nächsten Schritt werden die beiden Punkte im Unendlichen verbunden.

5 Konstruiert man nun eine Gerade, die den Punkt links unten und rechts oben im Viereck verbindet, direkt auch der Schnittpunkt mit der Gerade konstruiert werden, die die zwei Punkte im Unendlichen verbindet.

6 Nun fehlt noch eine letzte Gerade, die die Punkte verbindet, die noch nicht miteinander verbunden sind.

7 Verschiebt man die Punkte etwas, ergibt sich daraus die bekannte Darstellung der Fano-Ebene.



Die Beweise haben wir an der Tafel vorgeführt und an entsprechenden Stellen Rückfragen an die Schüler:innen gestellt. Dafür ist es hilfreich immer wieder auf die Definition eines idealen Dobble-Spiels zu verweisen. Mit Hilfe der Skizzen konnte die doch recht abstrakte Situation im Beweis verbildlicht werden.