Handlungsanweisung für Lehrkräfte

Allgemeine Informationen

Klassenstufe: 9

Länge: 90 min

Format: Workshop

Material: PowerPoint Präsentation, Cantor Diagramm, Zimmerkarten für das „Hilberts Hotel“

Thema: Unendlichkeit

Stichwörter: Hilberts Hotel, Mengenlehre, abzählbare Unendlichkeit, Cantors Diagonalargument, überabzählbare Unendlichkeit

Ziel des Workshops:

Die Schüler*innen lernen:

- Was „unendlich“ in der Mathematik bedeutet (und dass es *nicht immer gleich* ist)
- Wie man abzählbare und überabzählbare Mengen unterscheidet
- Dass man rationale Zahlen „zählen“ kann – reelle Zahlen aber nicht!

Ablauf und Zeitplan

Die Schüler*innen lernen:

- Was „unendlich“ in der Mathematik bedeutet (und dass es *nicht immer gleich* ist)
- Wie man abzählbare und überabzählbare Mengen unterscheidet
- Dass man rationale Zahlen „zählen“ kann – reelle Zahlen aber nicht!
- Und erleben die Faszination mathematischer Unendlichkeit durch kreative Gedankenexperimente

Zeit	Phase	Ziel/Methode
0-20min	Einstieg: Was ist unendlich? Beispiele für Unendlichkeiten aus dem Alltag	Brainstorming, Gesprächsimpulse durch Folien mit Beispielen
20-35min	Hilberts Hotel	Kreative, spielerische Einführung in unendliche Mengen über ein Gedankenexperiment
35-40min	Einführung in die Mengenlehre	Konzept unterschiedlich großer Unendlichkeiten verstehen
40-70min	Abzählbarkeit von Z und Q	Gruppenarbeit mit Bruchgitter und Kärtchen

70-80min	Nicht-Abzählbarkeit von R	Cantors Diagonalargument als selbstständige Gruppenaufgabe
80-90min	Gemeinsamer Ausblick, “find your pi day”	Philosophieren, Reflexion

Mathematischer Hintergrund

Folgende Hinweise dienen ausschließlich dem Verständnis der Lehrkräfte und sollen in dieser allgemeinen Ausführung keine Rolle für die SuS spielen. Daher sind bei der Durchführung des eigentlichen Workshops die Anwendung der (universitären) mathematischen Begriffe weitestgehend zu vermeiden und durch (schul-/alltags-)nähere Begriffe ausgetauscht werden. Einen Vorschlag für den Ersatz solcher Begrifflichkeiten, die im Workshop von Bedeutung sind, findet sich im folgenden Abschnitt immer hinter der jeweiligen Überschrift.

- Injektive Abbildung

Eine injektive Abbildung ist eine Abbildung, bei der jeder Wert im Zielbereich höchtens einmal getroffen wird. Beispiele für eine injektive Funktion sind zum Beispiel f(x)=2x oder f(x)=e^x.

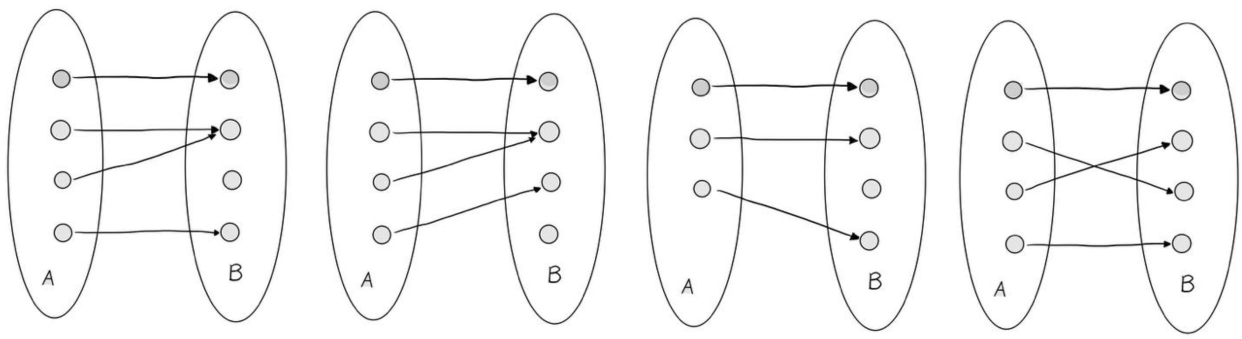
- Surjektive Abbildung

Eine surjektive Abbildung ist eine Abbildung, bei der jeder Wert mindestens einmal getroffen wird. Beispiele hierfür sind zum Beispiel f(x) = 5x^3 oder f(x) = 2x.

- Bijektive Abbildung (Eins-zu-Eins-Abbildung)

Eine bijektive Abbildung ist eine Abbbildung, die injektiv und surjektiv ist, das heißt die Abbildung ist eine Eins-zu-Eins-Abbildung zwischen zwei „gleich großen“ Mengen. Beispiele hierfür sind also f(x) = 2x oder f(x) = x^3.

➔ Eine Graphik, die das Verständnis zu den einzelnen Eigenschaften vertieft:



weder surjektiv noch injektiv | surjektiv aber nicht injektiv | injektiv aber nicht surjektiv | injektiv und surjektiv also bijektiv

- Mächtigkeit von Mengen (Größe einer Menge)

Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl einer Menge. Damit zwei Mengen gleichmächtig sind (also gleich viele Elemente haben), muss es eine Bijektion zwischen diesen zwei Mengen geben, das heißt also, jedem Element der einen Menge kann ein Element der anderen Menge zugeordnet werden. So sind zum Beispiel die Mengen in der obenstehenden Graphik gleichmächtig. Bei Mengen mit unendlich vielen Elementen zeigt sich hier eine Problematik, da es intuitiv schwierig ist, sich eine Zuordnung von unendlich vielen Elementen vorzustellen.

Daher versucht man bei unendlichen Mengen, die Elemente jeder Menge durch die natürlichen Zahlen abzuzählen (siehe Abschnitt zu „abzählbar unendlich“).

- Unendliche Menge

Eine Menge X heißt unendlich, wenn es keine natürliche Zahl n gibt, so dass die Menge X gleichmächtig zu {0, 1, …, n-1} ist. Beispiele für unendliche Mengen sind unter anderem die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen oder die reellen Zahlen.

- Abzählbar unendlich:

Eine Menge X heißt abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge X gibt, das heißt also, die Menge X lässt sich durch die natürlichen Zahlen abzählen. Unter anderem sind die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen abzählbar unendlich.

- Abzählbar

Eine Menge X heißt abzählbar, wenn X entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.

- Überabzählbar

Eine Menge X heißt überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist. Ein Beispiel wären hierfür die reellen Zahlen oder die komplexen Zahlen.

Durchführungshinweise

Zur Unterstützung für die Durchführung des Workshops ist eine PowerPoint Präsentation beigelegt, die durch den Workshop leiten soll. Zusätzliche Materialien werden passend zum Themenabschnitt hinter der jeweiligen Überschrift ergänzt. Die folgende Anleitung ist so aufgebaut, dass zunächst eine inhaltliche Einführung in die einzelnen Themengebiete angeführt wird und diese anschließend durch Hinweise zur Durchführung ergänzt werden.

Einstieg (Folie 2)

Den Einstieg bildet die Frage, was sich die Schülerinnen und Schüler unter dem Begriff der „Unendlichkeit“ verstehen. Die Frage ist zunächst bewusst offengehalten, sodass die SuS erst einmal in Kontakt mit diesem Begriff treten. Daher sind in der PowerPoint Präsentation ab Folie 3 Beispiele aus den Bereichen Physik, Biologie, Kunst und Philosophie gegeben, die die SuS auch schon aus dem Unterricht kennen. Durch die präzisere Frage, ob Unendlichkeit einzigartig ist und ob man diese größer machen kann, sollen die SuS langsam an den mathematischen Begriff der Unendlichkeit herangeführt werden. Die Aufgabe der Lehrkraft ist es daher, die Diskussion der SuS in Richtung der mathematischen Unendlichkeit anzuleiten. An dieser Stelle kann daher auch die Frage gestellt werden, ob es denn in der Mathematik so etwas wie eine „größte“ Zahl gibt. Dies kann durch den SuS bereits bekannten Konzepten wie dem Verhalten von Funktionen im Unendlichen oder der Irrationalität von Zahlen, die dann wiederum unendlich viele Dezimalstellen haben, getan werden.

Hilberts Hotel (ab Folie 7; Zimmerkarten)

Inhaltliche Einführung

Der Rahmen des Gedankenexperiments ist ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern. Diese werden mit Zimmerkärtchen mit natürlichen Zahlen bei 1 beginnend durchnummeriert. Das Szenario ist wie folgend:

Man könnte meinen, dass auch bei diesem Hotel ab einem gewissen Punkt keine Gäste mehr aufgenommen werden können, also genau dann, wenn alle Zimmer durch unendlich viele Gäste belegt sind. Doch dieses Problem lässt sich durch einen einfachen Trick lösen: Man bittet alle Gäste ein Zimmer weiterzugehen, das heißt, der Gast aus Zimmer 1 geht in Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 geht in Zimmer 3 und so weiter. Allgemein kann man hier also sagen, der n-te Gast in das Zimmer mit der Nummer n+1 geht. Damit wird also Zimmer 1 frei für einen weiteren Gast, denn da die Anzahl der Zimmer unendlich ist, gibt es nicht so etwas wie ein „letztes“ Zimmer. Dieses Prinzip lässt sich immer wieder durchführen, sodass das Hotel immer wieder Gäste aufnehmen kann.

Es ist darüber hinaus auch möglich, Platz für viele Gäste zu machen. Dafür bittet man die Gäste, in das Zimmer mit der Zahl zu gehen, die doppelt so groß wie ihre eigentliche ist. Das heißt, der Gast aus Zimmer 1 geht in Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 geht in Zimmer 4, der Gast aus Zimmer 3 geht in Zimmer 6 und so weiter. Allgemein kann man hier also sagen, der n-te Gast geht in das Zimmer mit der Nummer 2n. Dadurch werden alle Zimmer mit ungerader Zimmernummer (also die Zimmer 1, 3, 5, …) frei und es können wieder unendlich viele Gäste aufgenommen werden.

Eine solche Erweiterung lässt sich mit den unterschiedlichsten Vorschriften durchspielen. Dabei lassen sich immer wieder Situationen kreieren, in denen wieder neue Zimmer frei werden.

Wichtig ist bei diesen zwei Situationen, dass die Gäste ihre Zimmer gleichzeitig wechseln. Wenn dies nacheinander geschehen würde, würde es ansonsten bei unendlich vielen Gästen und einer unendlichen Anzahl von Zimmern unendlich lange dauern.

Durchführungshinsweise

Um diesen anfänglichen Gedanken der (mathematischen) Unendlichkeit zu verdeutlichen und weiterzuführen, wird das Gedankenexperiments des Hilberts Hotels durchgespielt. Zunächst wird den SuS erklärt, was das Hotel ist und was so besonders an diesem ist. Dafür erhält jede*r SuS eine Karte mit der jeweiligen Zimmernummer. (Die Karten hierfür können in der Datei “Zahlenkarten für Hilberts Hotel” gefunden und ausgedruckt werden). Wichtig ist bei der Nachstellung des Gedankenexperiments mit den SuS, dass diesen klar wird, dass hier nur ein kleiner Teil der (unendlich vielen) Zimmer dargestellt werden kann. Durch das Auslegen weiterer Zimmerkarten kann diese Unendlichkeit der Zimmer aufgezeigt werden.

Anschließend wird die Frage gestellt, wie eine weitere Person einen Platz im Hotel bekommen kann, obwohl alle Plätze belegt sind. Zur Verdeutlichung der Lösung begeben sich die SuS auf den Platz mit der nächsthöheren Zimmernummer, sodass das Zimmer mit der Nummer 1 frei wird. Dieser Platz kann dann von der Lehrkraft eingenommen werden.

Die anderen Szenarien werden auf die gleiche Weise durchgeführt, sodass den SuS klar wird, dass das Hotel immer erweitert werden kann und immer mehr Menschen darin einen Platz finden können. Bei der Durchführung stellen sich aufgrund der begrenzten Anzahl an Zimmerkärtchen Konzepte wie der Tausch in das Zimmer mit der doppelten Nummer als schwierig dar, weswegen diese viel mehr durch eine theoretische Durchführung und nicht durch eine wirkliche Ausführung der Umordnung erklärt werden sollen,

Haben wir unsere „Unendlichkeit“ größer gemacht? (ab Folie 20)

Die intuitive Frage, welcher der beiden abgebildeten Mengen größer ist, wird zunächst einmal auf etwas Verwirrung stoßen. Denn offensichtlich fehlen in der Menge der geraden Zahlen, im Vergleich zu den natürlichen Zahlen, alle ungeraden Zahlen und die Menge erscheint zunächst einmal kleiner. Um die SuS auf den richtigen Weg zu führen, wird daher auf die Begrifflichkeit der Gleichmächtigkeit zweier Mengen eingegangen (Folie 17). Mit dieser Hilfestellung wird dann ersichtlich, dass es auch eine Zuordnung zwischen den zwei Mengen gibt, welcher Vorschrift diese Zuordnung folgt (nämlich die Abbildung x –> 2x) und warum diese zwei Mengen also gleich groß sind.

Abzählbare Unendlichkeit (Folie 24)

Inhaltliche Einführung

Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich. Denn: Wählen wir für jede rationale Zahl eine eindeutige Darstellung r=n/m (das heißt also einen vollständig gekürzten Bruch), bei dem n eine natürliche Zahl und m eine ganze Zahl ist, so erhalten wir eine Bijektion zwischen den rationalen Zahlen und dem kartesischen Produkt der natürlichen und der ganzen Zahlen. Im Workshop wird diese bijektive Abbildung durch das Ordnen der Brüche verdeutlicht. Dieses Ordnen entspricht also der Zuordnung einer natürlichen Zahl zu den Brüchen. Wichtig ist hierbei die gekürzte Darstellung der Brüche, um Dopplungen von Zahlen zu vermeiden.

Durchführungshinweise

Um das Thema der „gleich großen“ Mengen abzuschließen, wird für weitere Konstruktionen der Begriff der „Abzählbaren Unendlichkeit“ eingeführt. Wichtig hierbei ist der Aspekt der Abzählbarkeit, der durchaus den SuS auch wörtlich zu erklären ist.

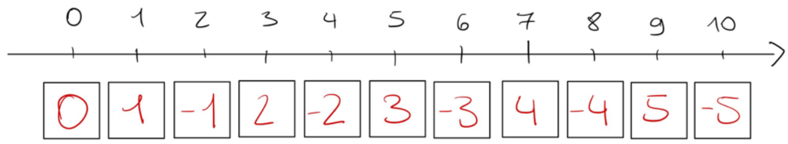
Interaktive Übung (Folie 25; Zahlenstrahl mit Zahlenkarten)

Durchführungshinweise

An die SuS werden Karten mit den einzelnen Zahlenmengen (hier Fokus auf ganze und rationale Zahlen) verteilt. Diese sollen sortiert werden, je nach dem welche Menge in welcher enthalten ist. Anschließend sollen die SuS entscheiden, welche dieser Mengen abzählbar ist und welche nicht. Hier ist nochmals der Aspekt der Durchnummerierung anzuführen. Die einzelnen Zahlenmengen werden hier als vorausgesetzt angesehen, da diese Schulstoff sind. Daher sind diese wenn dann nur kurz zu wiederholen und nochmals in Verbindung mit ihren jeweiligen Mengenzeichen zu setzen.

Zur Ordnung der ganzen Zahlen:

Die SuS erhalten Zahlenkarten der ganzen Zahlen und einen Zahlenstrahl (zu finden in den Dateien ”Zahlenstrahl” und ”ganze und rationale Zahlen”). Auf dem Zahlenstrahl sollen sie die ganzen Zahlen einordnen nach folgendem Prinzip:



Das heißt also, die ganzen Zahlen werden beginnend von der Null nach ihrem Betrag durchnummeriert, wobei bei den ganzen Zahlen außer der Null immer zuerst die positive ganze Zahl genannt wird und anschließend die jeweilige negative ganze Zahl.

Abzählbarkeit der rationalen Zahlen (ab Folie 22; Lernkartei)

Inhaltliche Einführung

Wir nutzen Cantors erstes Digonalargument, mit dem man zeigen kann, dass zwei unendliche Mengen (in unserem Fall die natürlichen und die rationalen Zahlen) gleichmächtig sind.[1] Dabei werden die Brüche in einem zweidimensionalen Schema (wie es auch auf Folie 22 zu sehen ist) angeordnet. Dieses Schema wird dann diagonal abgezählt, wobei Brüche, die noch nicht vollständig gekürzt sind, übersprungen werden. Das heißt also (0/1) ist die Nummer 1, (1/1) die Nummer 2, (1/2) Nummer 3, (-1/1) Nummer 4, (2/1) Nummer 5, (-1/2) Nummer 6 und so weiter (siehe dazu Folie 27). Auf diese Weise erhält man eine Abzählung der rationalen Zahlen. Damit erhält man also eine Bijektion zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der rationalen Zahlen, woraus sich -per Definition- schließen lässt, dass diese gleichmächtig sind.

Durchführungshinweise

Es soll versucht werden, dieses Durchnummerieren mit den rationalen Zahlen durchzuführen. Dafür wird Cantors erstes Diagonalargument herangezogen. Hierfür eignet sich die vorgefertigte Lernkartei und das Zahlengitter zum Einordnen der Brüche (rationale Zahlen ebenfalls aus der Datei “ganze und rationale Zahlen”, die Lernkartei unter “Lernkartei Cantors Zahlengitter”). Die Lernkartei leitet die SuS durch die Sortierung und bietet zusätzlich Hilfestellung zur Durchführung, sodass die Schüler die Aufgabe Schritt für Schritt selbstständig als Gruppe bearbeiten können. Daher befindet sich auf der Vorderseite immer ein bestimmter Arbeitsauftrag und auf der Rückseite Hilfestellungen die dann zur wirklichen Lösung führen. Zunächst sollen die SuS hier einmal selbst versuchen, eine sinnvolle Ordnung der rationalen Zahlen zu finden. Dabei muss den SuS auch der nicht-abbrechende Prozess dieser Nummerierung klargemacht werden, da das vorgefertigte Zahlengitter natürlich nur ein kleiner Ausschnitt der rationalen Zahlen zeigt.

Überabzählbarkeit der reellen Zahlen (ab Folie 28)

Inhaltliche Einführung

Im Gegensatz zu den rationalen Zahlen ist es bei den reellen Zahlen nicht möglich diese Ordnung durchzuführen. Bei diesen findet man in einem festgesetzten Intervall (in diesem Fall das offene Intervall von 0 bis 1) immer weitere Zahlen.

---

[1] Siehe dazu den mathematischen Hintergrund zu „abzählbar unendlich“ und „Mächtigkeit“ einer Menge

Wir nutzen das zweite Cantor Diagnoalargument zur Erklärung der Frage, warum die reellen Zahlen nicht abzählbar unendlich, sondern überabzählbar unendlich sind. Dafür betrachten wir eine beliebige Folge von reellen Zahlen im offenen Intervall (0,1). Die Zahlen in dieser Folge haben alle eine Dezimalbruch-Entwicklung, das heißt sie haben alle eine folgende Darstellung:

z = 0, a b c d e …

a, b, c, d, e und so weiter sind natürliche Zahlen. Eine solche Darstellung lässt sich für alle Zahlen der Folge finden. Wenn man diese untereinanderschreibt, bildet sich ein rechteckiges Schema, das wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \underline{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13} \dots \\ z_2 &= 0, a_{21}\ \underline{a_{22}}\ a_{23} \dots \\ z_3 &= 0, a_{31}\ a_{32}\ \underline{a_{33}} \dots \\ z_4 &= \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die unterstrichenen Dezimalstellen sollen hier die Diagonalelemente darstellen. Aus dieser Zahl z konstruieren wir eine neue Zahl wie folgt: Jede Dezimalstelle von der neuen Zahl x wird durch die passende Dezimalstelle der ehemaligen Zahl z definiert. Für die erste Dezimalstelle gilt: Wenn a = 5 ist, dann setzen wir die erste Dezimalstelle von x gleich 4, wenn nicht dann gleich 5. Mit dieser Definition ist sichergestellt, dass x eine andere Zahl ist als z. Dasselbe wird für alle Diagonalelemente der Zahlen in der Folge gemacht. So erhalten wir eine Zahl x, die sich von allen Zahlen in der Folge in mindestens einer Dezimalstellen unterscheidet und die größer als 0 und kleiner als 1 ist. Diese neu entstandene Zahl x nennt man Diagonalzahl, die einer jeder Folge in dieser Art zugeordnet werden kann.

$$x = 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots \quad \text{mit } b_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

Die Folge enthält also nicht die ihr zugeordnete Diagonalzahl und damit nicht jede reelle Zahl zwischen 0 und 1. Wählt man eine andere Folge, erhält man womöglich eine andere Diagonalzahl. Mit dieser Konstruktion haben wir gezeigt, dass es für jede Folge, die wir so kosntruieren können, eine Zahl zwischen 0 und 1 ist, die nicht in dieser Folge enthalten ist. Da das betrachtete Teilintervall (0,1) eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen ist, ist die Menge der reellen Zahlen erst recht überabzählbar, das heißt, man kann die reellen Zahlen nicht mithilfe der natürlichen Zahlen durchnummerieren.

Durchführungshinweise

Im Gegensatz zu den rationalen Zahlen ist eine solche Ordnung bei den reellen Zahlen also nicht möglich, was Cantors zweites Diagonalargument gezeigt hat. Den SuS wird dies zunächst anhand immer kleiner werdender Intervalle gezeigt und danach auf den Versuch einer solchen Sortierung eingegangen. Der obenstehende Beweis zur Überabzählbarkeit dient nur der inhaltlichen Einführung und dem Verständnis der Lehrkräfte und soll bei der eigentlichen Durchführung des Workshops in dieser Allgemeinheit keine Rolle spielen. Den SuS wird nur die Anwendung dieses Beweises anhand eines Beispiels klargemacht werden, was auf den Folien 29 und 30 ausgeführt wird.

Zur Erklärung des Vorgehens auf den Folien 33 und 34

Die Zahlen auf der linken Seite bilden die bei dem mathematischen Hintergrund erklärten Folge an Zahlen zwischen 0 und 1. Diese sind bewusst sehr willkürlich gewählt, um hier schon mal die unendlich große Zahlenmenge zu verdeutlichen. Die rot markierten Zahlen auf Folie 30 bilden die bereits erwähnten Diagonalelemente, die passend zur jeweiligen Zeile immer um 1 erhöht werden. Dadurch entsteht die Diagonalzahl, die nicht dieser Liste an Zahlen angehören kann, da sie sich immer an einer Stelle von den Zahlen der Liste unterscheidet.

Die SuS werden also durch die Lehrkraft durch den (inhaltlich deutlich abgeschwächten) Beweis geführt. So sollen sie sich zunächst einmal selbst eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1 mit 7 Dezimalstellen ausdenken. 5 dieser beliebigen Zahlen werden dann zur Veranschaulichung von Cantors Diagonalargument genutzt. Die SuS bekommen dadurch an dieser Stelle schon einmal ein Gefühl für die enorme Menge an möglichen Zahlen, die man in diesem Intervall auswählen kann.

Überabzählbare Unendlichkeit (Folie 35)

Um die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen wird der Begriff der Überabzählbarkeit definiert.

Fazit (Folie 36)

Im Fazit werden nochmal die Ergebnisse zu den Themen (über-)abzählbar unendlich um Zusammenhang mit den rationalen und reellen Zahlen zusammengefasst und wiederholt. Als abschließender Impuls wird den Schüler*innen die Webseite „Find My Pi Day“ vorgestellt. Dort können sie herausfinden, an welcher Stelle ihr Geburtsdatum in der unendlichen Folge der Nachkommastellen der Zahl π erscheint. Dies veranschaulicht auf anschauliche Weise, dass in einer unendlichen, nichtperiodischen Zahlenfolge theoretisch jede endliche Ziffernfolge – und damit auch persönliche Daten – enthalten sein kann. Der spielerische Zugang bietet einen anregenden Abschluss und unterstreicht eindrucksvoll die faszinierenden Eigenschaften unendlicher Mengen.