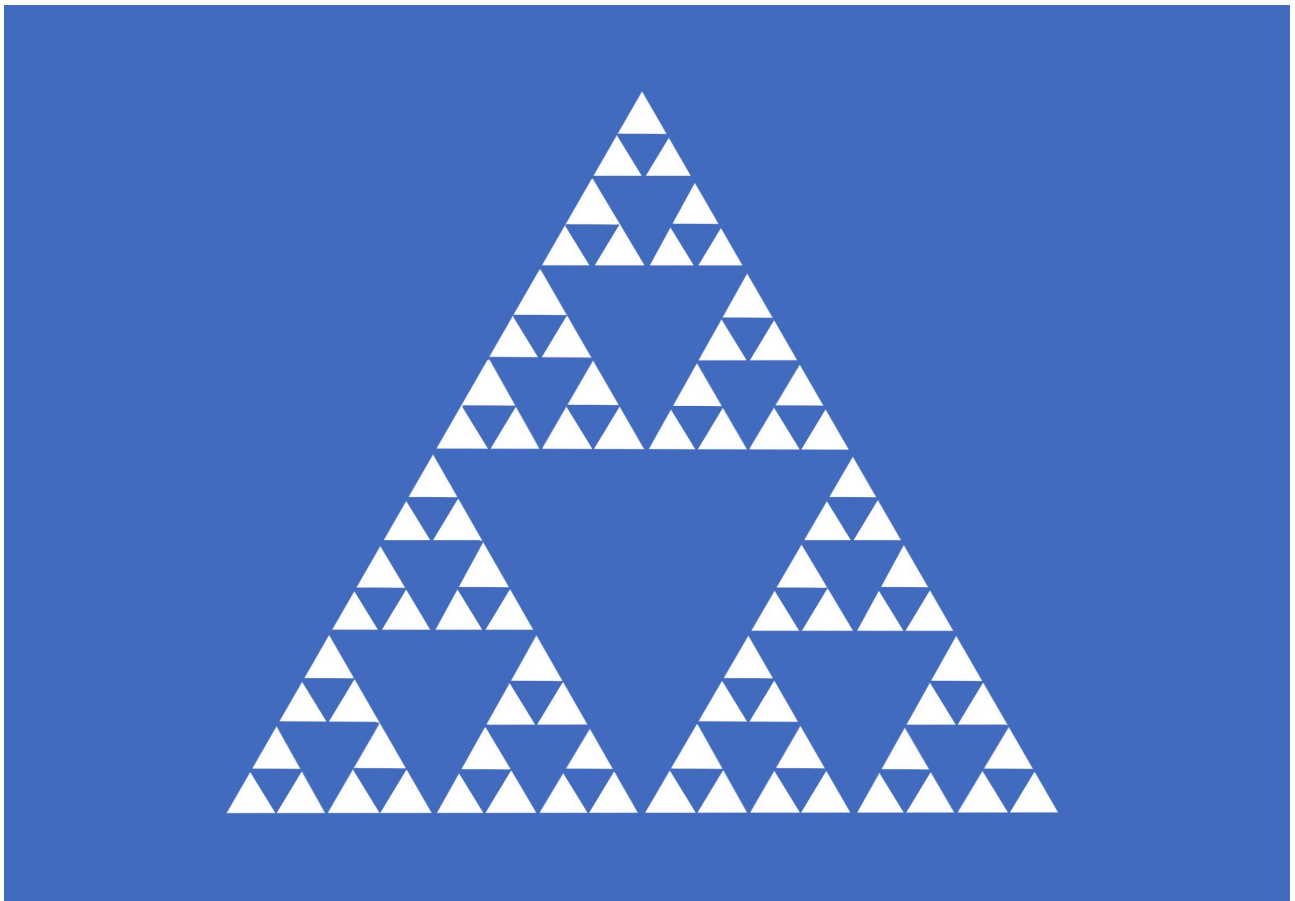


Fraktale sind interessante Objekte, die auch in vielen Bereichen außerhalb der Mathematik vorkommen. Heute wollen wir uns Fraktale einmal näher anschauen.

① Konstruktion eines Fraktals: Das Sierpinski-Dreieck

Zuerst wollen wir ein Fraktal aus einem gleichseitigen Dreieck selbst erzeugen. Gehe dazu wie folgt vor:

1. Verbinde die Mittelpunkte der drei Seiten.
2. Du siehst nun im Inneren vier Dreiecke. Male das mittlere aus. Achtung! Ausmalen bedeutet, dass wir die Fläche entfernen.
3. Mit den anderen drei Dreiecken fängst du nun wieder bei Schritt 1 an: Teile sie durch Verbinden der Seitenmitten und male das mittlere Dreieck aus.
4. Nun wiederholst du das Ganze mit den verbleibenden neun Dreiecken.



Du kannst jetzt schon erahnen, wie ein Sierpinski-Dreieck aussieht. Eigentlich müssten wir die Schritte unendlich weiter durchführen, aber das geht natürlich nicht, denn dafür bräuchten wir unendlich viel Zeit! Diese ersten Stufen helfen uns aber schon bei der Vorstellung. Wenn du eine Reise in die Unendlichkeit machen willst, schau mal hier rein: https://youtu.be/cObm93fqODI?si=t4IXughrYp_Hnpda.

Eine interessante Eigenschaft des Sierpinski-Dreiecks ist wie bei allen Fraktalen die Selbstähnlichkeit. Was könnte damit gemeint sein?

- Zur Konstruktion wird immer wieder der gleiche Prozess durchgeführt, bloß auf kleineren Ebenen
- D. h. wiederum auch, dass Ausschnitte des Objekts wie das ganze Objekt aussehen

Bei Fraktalen sind Teile des Objekts kleine Kopien der ganzen Figur. Diese Prinzip nennt man Selbstähnlichkeit. Mathematische Fraktale können bis in unendlich kleine Größenbereiche Selbstähnlichkeit aufweisen.

② Fraktale Dimension

(Mathematische) Fraktale können noch über eine andere Eigenschaft identifiziert werden: ihre Dimension.

Wir schauen uns dazu zunächst bekannte Dimensionen an:

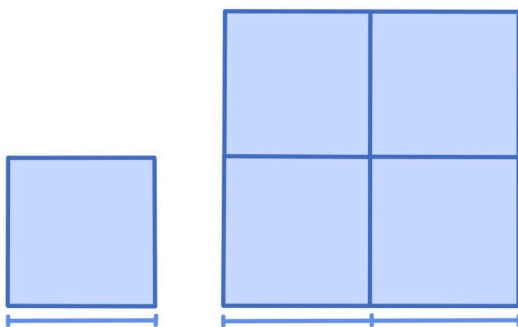


Eine Linie hat die Dimension 1. Das kann man auch folgendermaßen erkennen:

Wenn wir die Linie um den Faktor 2 skalieren (d. h. alle Längen mit 2 multiplizieren), passt die alte Linie 2 mal in die neue. Mathematisch schreibt sich das:

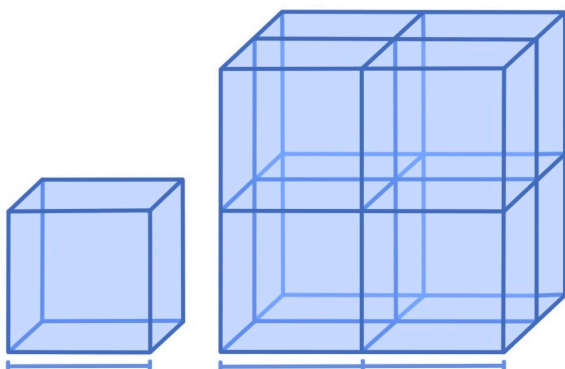
$$\text{Skalierungsfaktor} \quad 2^1 = 2 \quad \text{Dimension}$$

so oft passt das alte in das neue



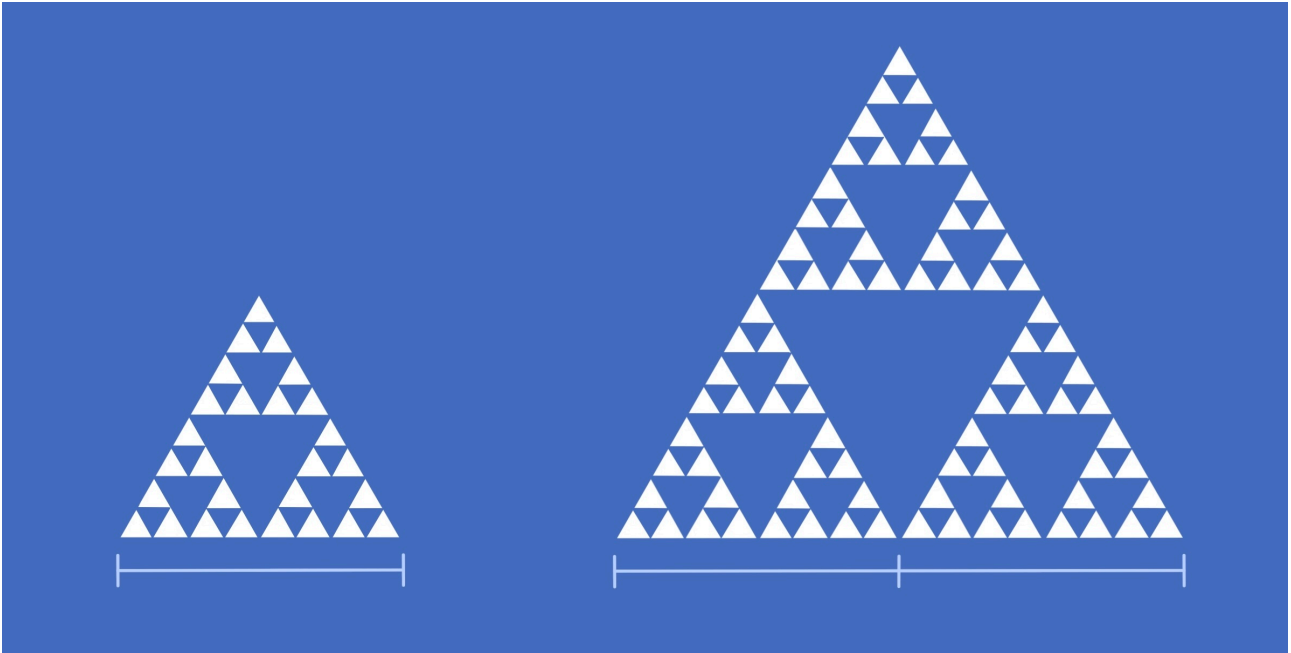
Ein Quadrat hat die Dimension 2. Zeichne nun ein um den Faktor 2 skaliertes Quadrat. Das alte Quadrat passt 4 Mal in das neue. Es gilt also:

$$2^2 = 4$$



Ein Würfel hat die Dimension 3. In den mit Faktor 2 skalierten Würfel passt der alte 8 Mal. Es gilt also:

$$2^3 = 8$$



Jetzt schauen wir uns das Sierpinski-Dreieck an. Wenn wir es um den Faktor 2 skalieren, passt das alte Dreieck 3 Mal in das neue. Unsere Formel ist somit:

$$2^d = 3$$

Diese können wir mit dem sogenannten Logarithmus lösen: $d = \log_2(3) \approx 1,585$

Was fällt dir an der Dimension des Sierpinski-Dreiecks auf?

- Es ist keine ganze Zahl
- Sie liegt zwischen der Dimension einer Linie und der eines Quadrats

Hier siehst du zwei weitere Beispiele der fraktalen Dimension: Die Koch-Kurve und das Vicsek-Fraktal.

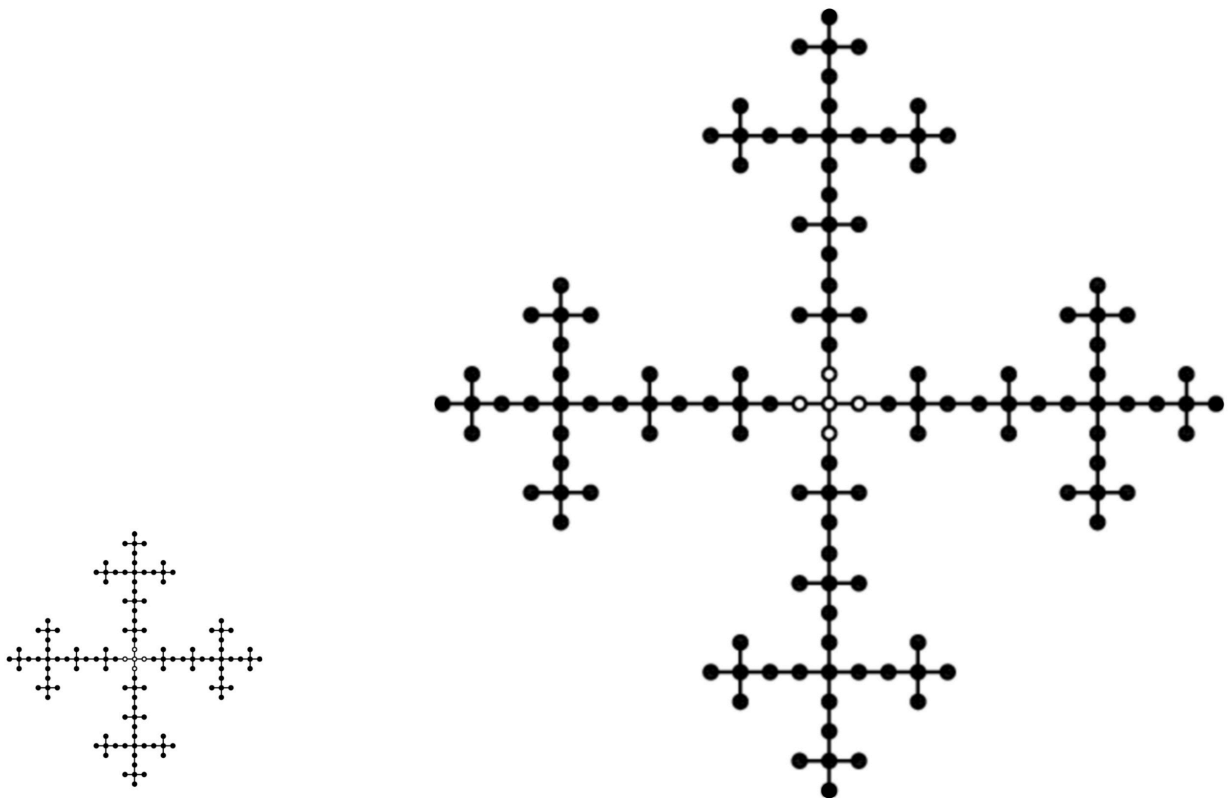
Finde den Skalierungsfaktor und wie oft das alte Objekt in das neue passt. Berechne dann die Dimension.



Skalierungsfaktor: 3

So oft passt das alte Objekt in das neue: 4

Dimension: $3^d = 4 \Rightarrow d = \log_3(4) \approx 1,262$



Skalierungsfaktor: 3

So oft passt das alte Objekt in das neue: 5

Dimension: $3^d = 5 \Rightarrow d = \log_3(5) \approx 1,465$

Fraktale haben Bruchdimension. Daher haben sie auch ihren Namen, denn Bruch heißt auf Englisch *fraction* und auf Latein heißt *fractus* zerbrochen.

③ Aber was genau bedeutet Bruchdimension und warum haben Fraktale diese?

Versuche den Flächeninhalt des Sierpinski-Dreiecks herauszubekommen. Nimm Blatt 1 zur Hand und fülle die Tabelle aus. Überlege dir, wie sich die Werte verändern, wenn man unendlich viele Stufen des Sierpinski-Dreiecks betrachtet.

Stufe	0	1	2	3	4	10	x
Zahl der weißen Dreiecke	1	3	9	27	81	59049	3^x
Flächeninhalt eines weißen Dreiecks	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1048576}$	$\frac{1}{4^x}$
Gesamtflächeninhalt aller weißen Dreiecke	1	0,75	0,563	0,422	0,316	0,0563	$\frac{3^x}{4^x}$

Was fällt dir auf? Was passiert, wenn wir in Richtung Unendlichkeit gehen?

- Der Flächeninhalt wird immer kleiner
- In Richtung Unendlichkeit läuft er gegen 0

Betrachte nun noch den Umfang. Denk daran: Das Dreieck, von dem wir ausgehen, ist gleichseitig.

Stufe	0	1	2	3	4	10	x
Zahl der weißen Dreiecke	1	3	9	27	81	59049	3^x
Umfang eines weißen Dreiecks	$3 \cdot 1$ = 3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{1024}$	$\frac{3}{2^x}$
Gesamtumfang aller weißen Dreiecke	3	4,5	6,75	10,125	15,188	57,665	$\frac{3^{x+1}}{2^x}$

Was fällt dir auf? Was passiert, wenn wir in Richtung Unendlichkeit gehen?

- Der Umfang wird immer größer
- In Richtung Unendlichkeit läuft er gegen unendlich