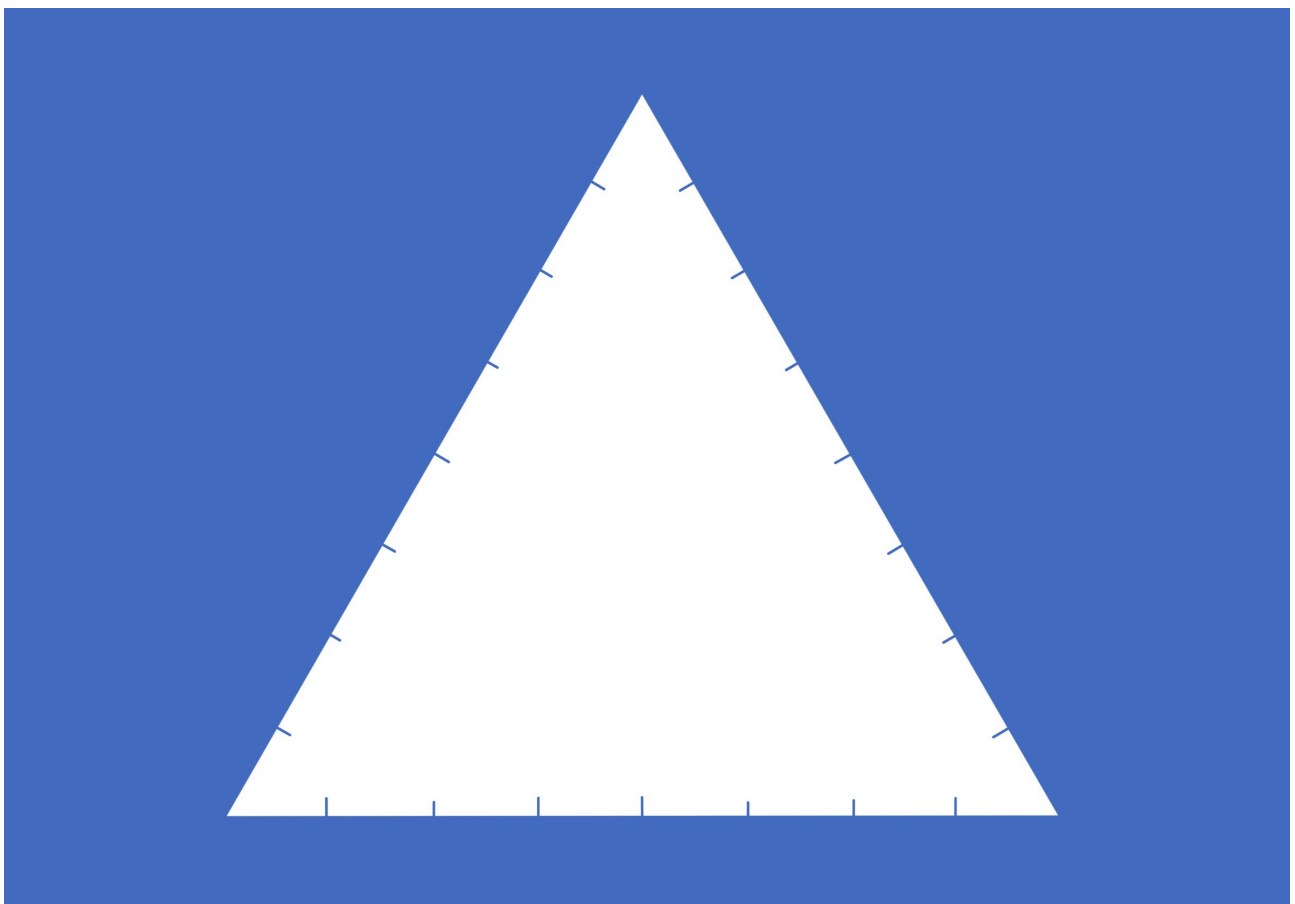


Fraktale sind interessante Objekte, die auch in vielen Bereichen außerhalb der Mathematik vorkommen. Heute wollen wir uns Fraktale einmal näher anschauen.

① Konstruktion eines Fraktals: Das Sierpinski-Dreieck

Zuerst wollen wir ein Fraktal aus einem gleichseitigen Dreieck selbst erzeugen. Gehe dazu wie folgt vor:

1. Verbinde die Mittelpunkte der drei Seiten.
2. Du siehst nun im Inneren vier Dreiecke. Male das mittlere aus. Achtung! Ausmalen bedeutet, dass wir die Fläche entfernen.
3. Mit den anderen drei Dreiecken fängst du nun wieder bei Schritt 1 an: Teile sie durch Verbinden der Seitenmitten und male das mittlere Dreieck aus.
4. Nun wiederholst du das Ganze mit den verbleibenden neun Dreiecken.



Du kannst jetzt schon erahnen, wie ein Sierpinski-Dreieck aussieht. Eigentlich müssten wir die Schritte unendlich weiter durchführen, aber das geht natürlich nicht, denn dafür bräuchten wir unendlich viel Zeit! Diese ersten Stufen helfen uns aber schon bei der Vorstellung. Wenn du eine Reise in die Unendlichkeit machen willst, schau mal hier rein: https://youtu.be/cObm93fqODI?si=t4IXughrYp_Hnpda.

Eine interessante Eigenschaft des Sierpinski-Dreiecks ist wie bei allen Fraktalen die Selbstähnlichkeit. Was könnte damit gemeint sein?

Bei Fraktalen sind Teile des Objekts kleine Kopien der ganzen Figur. Diese Prinzip nennt man Selbstähnlichkeit. Mathematische Fraktale können bis in unendlich kleine Größenbereiche Selbstähnlichkeit aufweisen.

② Fraktale Dimension

(Mathematische) Fraktale können noch über eine andere Eigenschaft identifiziert werden: ihre Dimension.

Wir schauen uns dazu zunächst bekannte Dimensionen an:



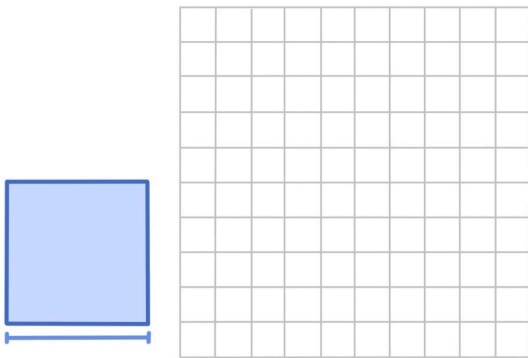
Eine Linie hat die Dimension _____. Das kann man auch folgendermaßen erkennen:

Wenn wir die Linie um den Faktor 2 skalieren (d. h. alle Längen mit 2 multiplizieren), passt die alte Linie 2 mal in die neue. Mathematisch schreibt sich das:

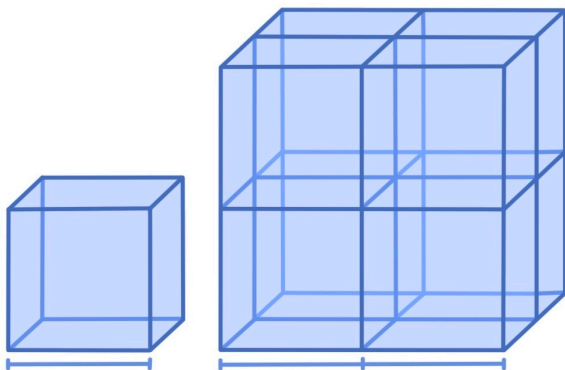
$$2^1 = 2$$

Skalierungsfaktor Dimension

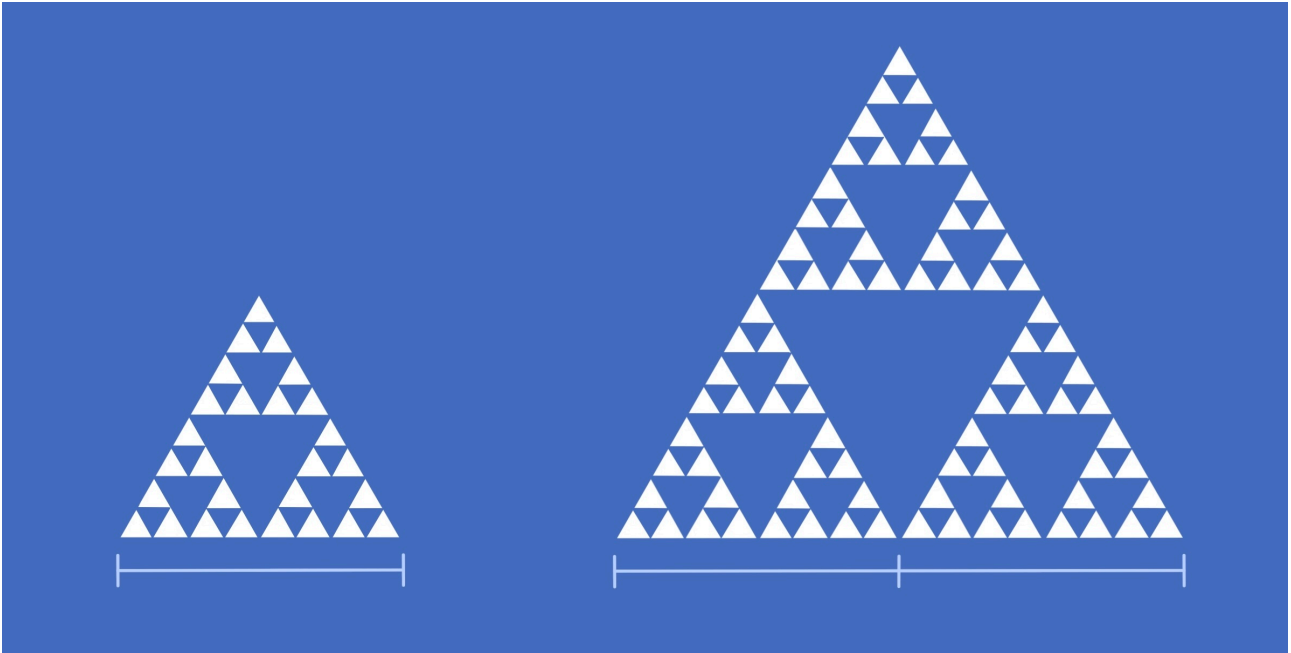
so oft passt das alte in das neue



Ein Quadrat hat die Dimension _____. Zeichne nun ein um den Faktor 2 skaliertes Quadrat. Das alte Quadrat passt ____ Mal in das neue. Es gilt also:



Ein Würfel hat die Dimension _____. In den mit Faktor 2 skalierten Würfel passt der alte ____ Mal. Es gilt also:



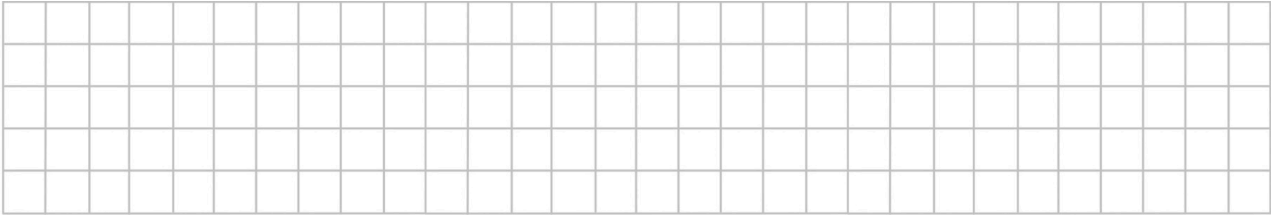
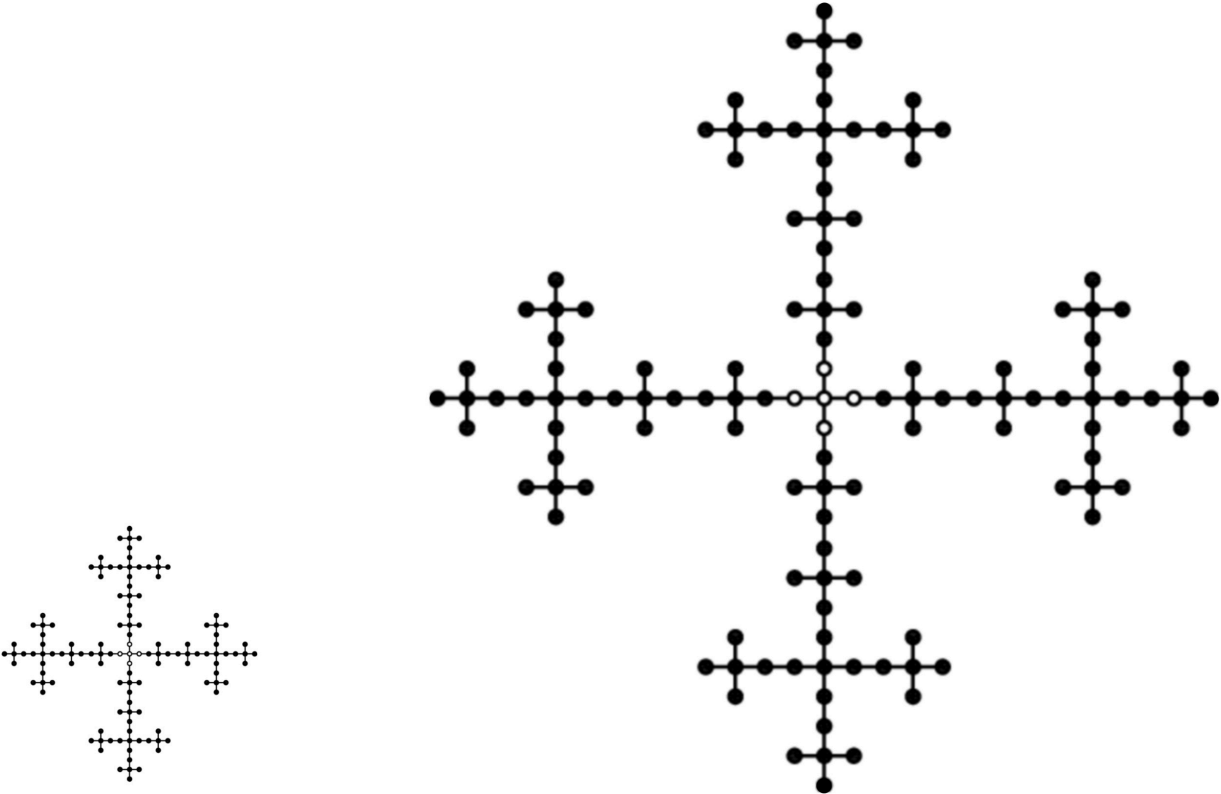
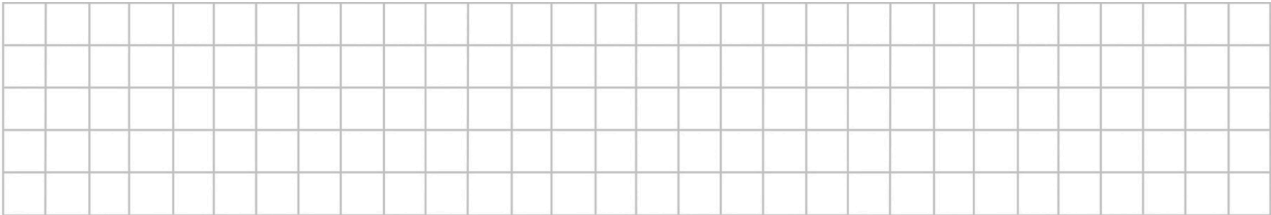
Jetzt schauen wir uns das Sierpinski-Dreieck an. Wenn wir es um den Faktor 2 skalieren, passt das alte Dreieck ____ Mal in das neue. Unsere Formel ist somit:

$$2^d = ___$$

Diese können wir mit dem sogenannten Logarithmus lösen: $d = \log_2(___) \approx 1,585$

Was fällt dir an der Dimension des Sierpinski-Dreiecks auf?

Hier siehst du zwei weitere Beispiele der fraktalen Dimension: Die Koch-Kurve und das Vicsek-Fraktal.
Finde den Skalierungsfaktor und wie oft das alte Objekt in das neue passt. Berechne dann die Dimension.



Fraktale haben Bruchdimension. Daher haben sie auch ihren Namen, denn Bruch heißt auf Englisch *fraction* und auf Latein heißt *fractus* zerbrochen.

③ Aber was genau bedeutet Bruchdimension und warum haben Fraktale diese?

Versuche den Flächeninhalt des Sierpinski-Dreiecks herauszubekommen. Nimm Blatt 1 zur Hand und fülle die Tabelle aus. Überlege dir, wie sich die Werte verändern, wenn man unendlich viele Stufen des Sierpinski-Dreiecks betrachtet.

Stufe	0	1	2	3	4	10	x
Zahl der weißen Dreiecke	1	3					
Flächeninhalt eines weißen Dreiecks	1						
Gesamtflächeninhalt aller weißen Dreiecke	1						

Was fällt dir auf? Was passiert, wenn wir in Richtung Unendlichkeit gehen?

Betrachte nun noch den Umfang. Denk daran: Das Dreieck, von dem wir ausgehen, ist gleichseitig.

Stufe	0	1	2	3	4	10	x
Zahl der weißen Dreiecke	1						
Umfang eines weißen Dreiecks	$3 \cdot 1$ $= 3$						
Gesamtumfang aller weißen Dreiecke	3						

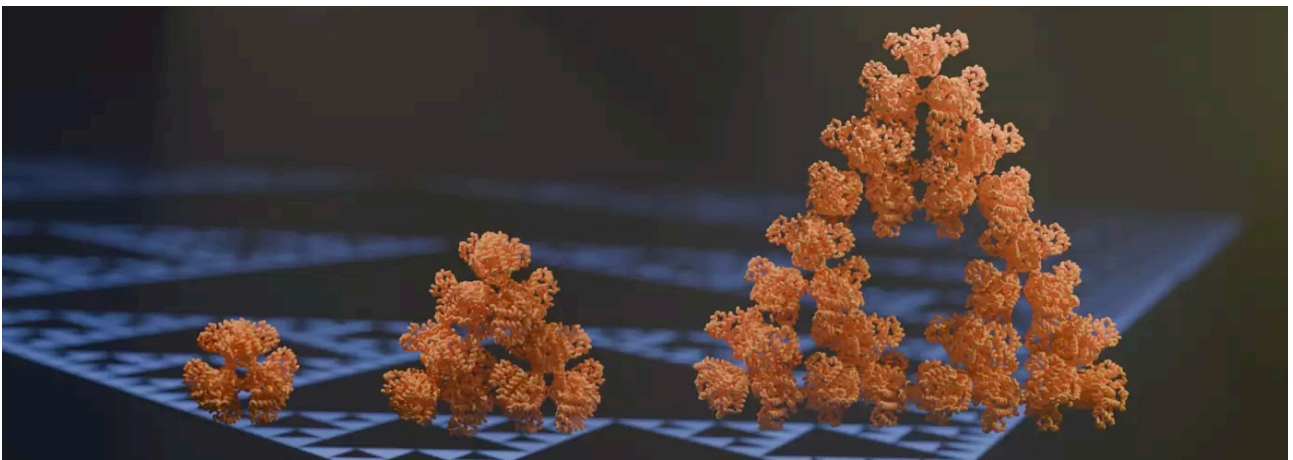
Was fällt dir auf? Was passiert, wenn wir in Richtung Unendlichkeit gehen?

Mit jeder Stufe entfernen wir einen Teil der Fläche des Sierpinski-Dreiecks. Wenn wir dies unendlich oft tun, wäre irgendwann keine Fläche mehr vorhanden. Gleichzeitig geht der Umfang des Dreiecks gegen unendlich. Deshalb liegt das Sierpinski-Dreieck zwischen einer 2-dimensionalen Fläche und einer 1-dimensionalen Linie.

④ Fun-Facts

Fun-Fact: Das Sierpinski-Dreieck in der Natur

In Marburg wurde 2024 ein Enzym gefunden, dessen Struktur wie das Sierpinski-Dreieck aussieht. Vermutlich handelt es sich dabei um einen evolutionären Zufall.



Falls du mehr dazu lesen willst, schau einmal hier: <https://www.mpg.de/21808266/0410-terr-erstes-fraktales-molekuel-in-der-natur-entdeckt-153410-jjjjasdkajshdajk>

Fun-Fact: Sierpinski-Tetraeder

Das Prinzip des Sierpinski-Dreiecks kann man auch in höhere Dimensionen erweitern. So entsteht z. B. der Sierpinski-Tetraeder, der wiederum neue spannende Eigenschaften besitzt.

