Das Heronverfahren

Was ist das Heronverfahren?

Das Heronverfahren ist nach Heron von Alexandria benannt, war den Babyloniern aber schon rund 1000 Jahre länger bekannt, als dem griechischen Mathematiker. Das Verahren wird deswegen auch babylonisches Wurzelziehen genannt. Mit dem Heronverfahren können die Quadratwurzeln von beliebigen reellen Zahlen angenähert werden.

Wie funktioniert das?

Wir wissen, dass der Flächeninhalt eines Quadrats die Seitenlänge zum Quadrat ist.

$$A = s^2$$

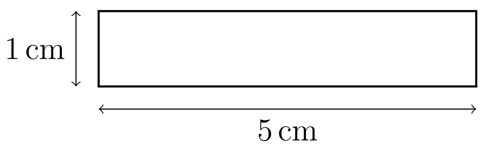
Wenn wir die Wurzel von einer Zahl ziehen, können wir uns das vorstellen als ob wir zu einem Quadrat mit bekanntem Flächeninhalt die Seitenlängen bestimmen wollen. Wir haben also A und suchen s.

1. Finde s und zeichne das Quadrat:
   - $A = 1$
   - $A = 4$
   - $A = 5$

Bei $A = 1$ und $A = 4$ ist das kein Problem. Die Seitenlänge von $A = 5$ ist schon schwieriger zu ermitteln. Hier kommt das Heronverfahren ins Spiel.

Wir nähern uns einem Quadrat mit Flächeninhalt 5 schrittweise an.

2. Wir fangen mit irgendeinem Rechteck an, das Flächeninhalt 5 hat. Zum Beispiel einem 5 mal 1 Rechteck.



Desto weiter unser Rechteck davon entfernt ist ein Quadrat zu sein, desto schlechter ist auch unsere Annährung an $\sqrt{5}$

3. Wir kennen die perfekte Seitenlänge des Quadrats nicht, aber zwischen welchen beiden Seitenlängen muss sie auf jeden Fall liegen?

4. Welcher Wert bietet sich also an? Und wie berechnet man diesen Wert?

5. Die Formeln für unsere neuen Seitenlängen sind also:

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} \quad und \quad y_1 = \frac{A}{x_1}$$

6. Berechne die neuen Seitenlängen für ein Rechteck mit Flächeninhalt 5. Zeichne ein Rechteck mit diesen neuen Seitenlängen.

7. Wir sind jetzt zwar etwas näher an einem Quadrat dran, aber noch nicht nah genung. Wie kommen wir jetzt noch näher an die perfekte Seitenlänge?

8. Nähere $\sqrt{5}$ so nah an, wie möglich.

Und was ist mit höheren Wurzeln?

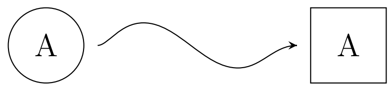
Wenn wir eine Quadratwurzel durch ein Quadrat beschrieben haben, womit können wir die dritte Wurzel (Kubikwurzel) geometrisch beschreiben?

1. Wir wählen x_0 beliebig (kleiner als die Zahl deren dritte Wurzel wir ziehen wollen).
2. Finde eine Formel, wie wir die anderen beiden Seiten des Quaders berechnen können (wenn wir nur eine von drei Seitenlängen gegeben haben, müssen wir die Grundfläche des Quaders geschickt wählen, damit wir nur eine Seitenlänge tatsächlich berechnen müssen). Orientiere dich an der Formel für Quadratwurzeln.
3. Und wie berechnen wir das nächste x?
4. Benutze deine Formeln um $\sqrt[3]{12}$ zu approximieren.
5. Findest du eine allgemeine Formel für $\sqrt[k]{A}$?

Die Quadratur des Kreises

Wir benutzen im Folgenden nur Lineal und Zirkel, andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Bei dieser Station versuchen wir nicht direkt eine Zahl zu approximieren, sondern eine Fläche. (Um unsere Approximation zu überprüfen, benutzen wir einen Taschenrechner.)

Ein antikes Problem



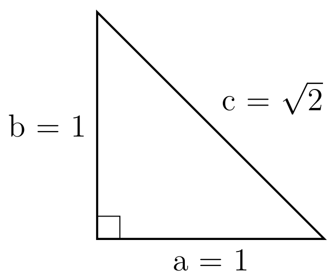
1. Zeichne einen Kreis und berechne seinen Flächeninhalt A.
2. Zeichne nun ein Quadrat mit dem genau gleichen Flächeninhalt A.
3. Beschreibe wie du vorgegangen bist.

Mathematiker haben Jahrhunderte an der Quadratur des Kreises gearbeitet. Also daran, bei einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt zu konstruieren.

1. Was sind die Formeln für den Flächeninhalt eines Kreises (A_K)und eines Quadrates (A_Q) ?

2. Wir setzten nun $A_K = A_Q$ und nehmen erstmal an, dass der Radius des Kreises 1 ist (also $r = 1$).
3. Welchen Wert brauchen wir laut 2. also nur um das Quadrat zu konstruieren?

Das Problem der Quadratur des Kreises ist also eigentlich die Aufgabe ein Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{\pi}$ zu konstruieren, bzw. π selbst.
Dass π irrational ist, hält uns erstmal nicht auf. Wir können irrationale Zahlen geometrisch darstellen, ohne sie genau auszurechnen. Laut dem Satz des Pythagoras gilt zum Beispiel:

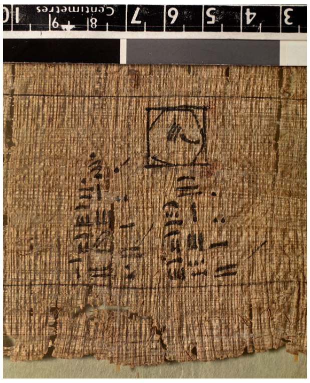


Da für ein rechtwinkliges Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Mathematiker, Philosophen und Menschen mit Hang zur Geometrie beschäftigen sich schon seit dem 5. Jahrhundert vor Christus mit der Quadratur des Kreises. Im Laufe der Zeit wurden viele Methoden entwickelt die ein Quadrat mit möglichst gleichem Flächeninhalt konstruieren sollen:

Methode aus dem Papyrus Rhind

1. Zeichne einen Kreis.
2. Zeichne ein Koordinatenkreuz durch den Kreismittelpunkt.
3. Teile die x-Achse zwischen den beiden Schnittpunkten mit dem Kreis in neun gleichgroße Abschnitte ein.
4. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge von acht dieser Neuntel.
5. Überlege dir eine Formel für die Seitenlänge des Quadrats, in Abhängigkeit vom Radius r. (Hinweis: Die Strecke, die du unterteilt hast war der Durchmesser, also 2r.)
6. Gilt wirklich $A_K = A_Q$?



Methode von Hobson

1. Zeichne einen Kreis mit dem Radius r.

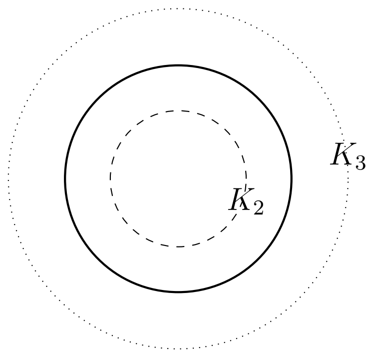
2. Zeichne einen weiteren Kreis K_2, mit dem gleichen Kreismittelpunkt und dem Radius $r_2 = \frac{3}{5}r$

3. Zeichne einen dritten Kreis K_3, wieder mit dem gleichen Kreismittelpunkt und dem Radius $r_3 = \frac{3}{2}r$

4. Zeichne nun eine Linie durch den Kreismittelpunkt, die auf der einen Seite bis zu K_2 geht und auf der anderen Seite bis zu K_3.

5. Diese Linie ist die Seitenlänge des Quadrats.

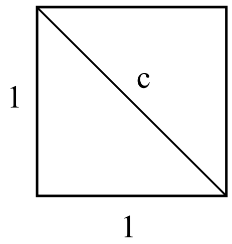
6. Berechne wieder den Flächeninhalt von Quadrat und Kreis und überprüfe ob $A_K = A_Q$ gilt.



Definitiv unmöglich?

Wir haben bei den letzten beiden Methoden gesehen, dass wir recht nah an ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt herankommen, es aber nicht so ganz stimmt.
Dass die Quadratur des Kreises nur mit Zirkel und Lineal tatsächlich unmöglich ist -und wir nicht nur noch nicht die richtige Methode gefunden haben- wissen wir erst seit 1882. In diesem Jahr bewies Ferdinand von Lindemann, dass π eine sogenannte transzendente Zahl ist. Das bedeutet, dass π keine Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist.
In Geometrie "übersetzt" bedeutet das, dass wir π nicht in endlich vielen Schritten durch das Schneiden von Kreisen und Geraden finden können.

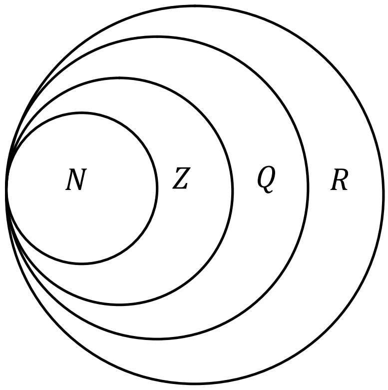
Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$



Motivation:

- Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
  ➔ Für ein 1x1 Quadrat: 1 + 1 = c^2
  ➔ $c = \sqrt{2}$ = ???

Aufgabe 1 (Wiederholung):



Beschreibe kurz in eigenen Worten die folgenden Zahlenmengen:

a) („Natürliche Zahlen“) $N :=$

b) („Ganze Zahlen“) $Z :=$

c) („Rationale Zahlen“) $Q :=$

d) („Reelle Zahlen“) $R :=$

Hinweis: das Zeichen $:=$ *sprechen wir in der Mathematik als*

„… ist definiert als …“

Aufgabe 2:

Beweise das $\sqrt{2}$ eine **irrationale Zahl** ist. Zu jedem Schritt gibt es **drei Hinweise** die euch jeweils einen Tipp geben.

Der **erste** Tipp steht immer schon direkt neben dem jeweiligen Schritt.

Der **zweite** ist jeweils auf der Karte, auf der „Hinweis 2“ und die Zahl des jeweilige Schritts steht.

Die **letzte** Karte gibt euch die **Lösung** für den jeweiligen Schritt. Diese solltet ihr euch immer anschauen, wenn ihr denkt einen Schritt fertig zu haben, oder gar nicht weiter kommt. Viel Erfolg!!

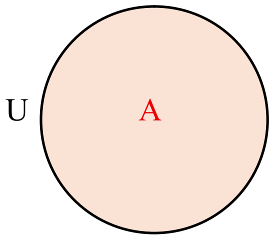
Beweis per Widerspruch:

Bei einem Widerspruchsbeweis nehmen wir ganz am Anfang das „Gegenteil“ von dem an, was wir beweisen wollen und zeigen dann durch einige Folgerungen, dass es dabei zu einer logischen Unmöglichkeit kommt.

Schritt	Aussage	Hinweis 1
1	$\sqrt{2} =$ Mit $q \neq$ Dies ist ein **vollständig g__ __ __ __ __ __ __ __ __** **B__ __ __ __**	Wir nehmen an $\sqrt{2}$ sei *rational.* Was können wir dadurch über ihre Darstellung durch *zwei ganze Zahlen* p,q aussagen? Welche Zahl darf q nicht sein? Was können wir für diese Lösung noch annehmen?
2	$\sqrt{2} =$ | 2 = ( ) | 2 = |	Wie können wir die Gleichung aus Schritt 1 durch einfache Schritte umformen, so dass am Ende keine Klammern mehr gebraucht werden
3		Können wir es schaffen, dass auf mindestens einer Seite der Gleichung aus Schritt 2 nur noch eine Variable (evtl. mit Koeffizient, Potenz, o.ä.) steht?
4		Durch welche nicht als Variable dargestellte Zahl können wir eines der beiden Quadrate jetzt teilen? Wie nennen wir Teilbarkeit durch diese Zahl noch?
5	… daher gibt es eine natürliche Zahl n , sodass $p =$	Was bedeutet Schritt 4 für die Wurzel der Quadratzahl und deren Teilbarkeit? Vervollständigt die Gleichung.
6	$2 * q^2 = \quad = ()^2 = (\quad) * (\quad) =$ | $q^2 =$	Füllt die Gleichung aus. Ihr werdet dafür teilweise vorherige Schritte benutzen müssen.
7		Was bedeutet Schritt 6 für die Teilbarkeit von q^2 ? Was bedeutet das für q ?
8		Wieso passen unsere Aussagen aus Schritt 7 und Schritt 5 nicht mit Schritt 1 zusammen ?

Hinweis 2	**Lösung**
Schritt 1: Rationale Zahlen sind Brüche aus ganzen Zahlen. Sicher wisst ihr, dass man Brüche immer gekürzt angeben sollte.	Schritt 1: Sei $\sqrt{2}$ rational. Dann existieren ganze Zahlen p,q mit q≠0, so dass $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ein **vollständig gekürzter** Bruch ist.
Schritt 2: Zuerst wollen wir die Wurzel entfernen. Wie geht das? Dann müsst ihr die Potenzgesetze auf die Klammer anwenden.	Schritt 2: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ | „hoch 2“ $2 = (\frac{p}{q})^2$ | „ausrechnen“ $2 = \frac{p^2}{q^2}$
Schritt 3: Ihr müsst hier nur eine Multiplikation machen. Wie könnt ihr q^2 auf die andere Seite kriegen?	Schritt 3: $2 = \frac{p^2}{q^2}$ | q^2 $2 * q^2 = p^2$
Schritt 4: Es geht um die Teilbarkeit durch 2, also gerade oder ungerade. Können wir diese für q^2 oder p^2 aus Schritt 3 ablesen?	Schritt 4: p^2 ist gerade, da $2 * q^2$ auf jeden Fall eine gerade Zahl ergibt, durch die Multiplikation mit 2.
Schritt 5: Könnt ihr eine gerade Quadratzahl finden, deren Wurzel ungerade ist? Was könnte das für *p* heißen?	Schritt 5: Tatsächlich ist die Wurzel einer geraden Quadratzahl auch immer gerade. Also ist in diesem Fall *p* gerade. Das heißt es gibt eine natürliche Zahl *n* so dass $p = 2n$.
Schritt 6: Für das erste „=“ braucht ihr Schritt 3, dann müsst ihr nutzen, dass *p* gerade ist und ausmultiplizieren. Für die zweite Zeile müsst ihr dann durch 2 teilen.	Schritt 6: Für eine natürliche Zahl *n* mit $2n = p$ (existiert da *p* gerade) gilt: $2 * q^2 = p^2 = (2 * n)^2 = (2 * n) * (2 * n) = \mathbf{4}n^2$ ⇔ $q^2 = \mathbf{2}n^2$
Schritt 7: Wenn eine natürliche Zahl n^2 existiert, so dass $q^2 = 2n^2$, durch welche Zahl kann man dann q^2 teilen? Was heißt das für *q* nach Schritt 5?	Schritt 7: Wenn $q^2 = 2n^2$ gilt, dann muss q^2 gerade sein. Wie bei Schritt 5 heißt das, dass auch *q* gerade sein muss.
Schritt 8: Setzt nun $2n^2$ und $2n$ in den Bruch $\frac{p}{q}$ ein. Was könnt ihr mit diesem Bruch jetzt machen? Warum passt das nicht zu Schritt 1?	Schritt 8: Es ist $\frac{p}{q} = \frac{2n}{2n^2}$. Diese Bruch können wir nach der 2 kürzen. In Schritt 1 haben wir aber gesagt, dass $\frac{p}{q}$ ein vollständig gekürzter Bruch ist. Das ist also ein **Widerspruch!!**

Monte-Carlo-Methode zur Approximation von π



Wie ihr wisst können wir für einen Kreis mit Radius r rechnen:

Den Umfang **U** = $2 * \pi * r$ und den Flächeninhalt **A** = $\pi * r^2$

Die **„Kreiszahl“** π ist dabei essentiell. Auch sie ist eine **irrationale** Zahl.

Neben einigen mathematischen Methoden können wir sie durch die **Monte-Carlo-Methode** auch graphisch approximieren. Das wollen wir im Folgenden tun.

Aufgabe 1:

Auf der nächsten Seite seht ihr ein Quadrat mit dem größtmöglichen Kreis, der in das Quadrat passt.

a) Bestimmt die Seitenlängen a und die Fläche $A_{Quadrat}$ des Quadrats in Abhängigkeit vom Radius r .

$a =$; $A_{Quadrat} =$

b) Ergänzt den/die fehlende/n Schritt/e zum Verhältnis der Flächeninhalte von Kreis und Quadrat. Tipp: Nutzt die Formeln von oben.

$$\frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} = \frac{\pi}{4}$$

c) Für die graphische Annäherung wollen wir jetzt nur ein Viertel des Quadrates nehmen. Das geht, weil in einem Viertel des Quadrates (rotes Quadrat) das Verhältnis von Kreisfläche und Quadratfläche gleich ist, wie im ganzen Quadrat. Warum ist das so?

Antwort (in eigenen Worten):

d) Unten seht ihr eine Tabelle und eine Form. Eine Person von euch nimmt sich jetzt einen Stift (am besten Bleistift), schließt die Augen und verteilt dann zufällig Punkte im roten Quadrat.

Wichtig ist, dass die Punkte auch wirklich möglichst zufällig verteilt sind. Die anderen können dazu auch das Papier unter dem Stift verrutschen. Immer nach einer bestimmten Anzahl Punkte im roten Quadrat (z.B. 10; 25; 50; 100) macht ihr eine kurze Pause, zählt die Punkte und füllt die **ersten vier Spalten** der Tabelle aus.

e) Wenn die Punkte zufällig verteilt sind sollten sie etwa dem Verhältnis der Flächeninhalte entsprechen, also $\frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} \approx \frac{y}{x}$. Bestimmt mit Hilfe von b) eine Formel zur Annäherung an die Kreiszahl π. Tragt diese **oben in die fünfte Spalte** der Tabelle ein und füllt die Spalte aus. Was könnt ihr bei der Annäherung beobachten, wenn es mehr Punkte werden?

Hinweis: das Zeichen $:=$ *sprechen wir in der Mathematik als*

„… ist definiert als …“

c) Punkte gesamt (z.B. 10; 25; 50; 100)	**c) Punkte im roten Quadrat (inklusive Kreis) =: *x***	**c) Punkte im Viertelkreis im roten Quadrat=: *y***	**c) Verhältnis** $\frac{y}{x}$	**d) Annäherung an** $\pi \approx$

Monte-Carlo-Methode

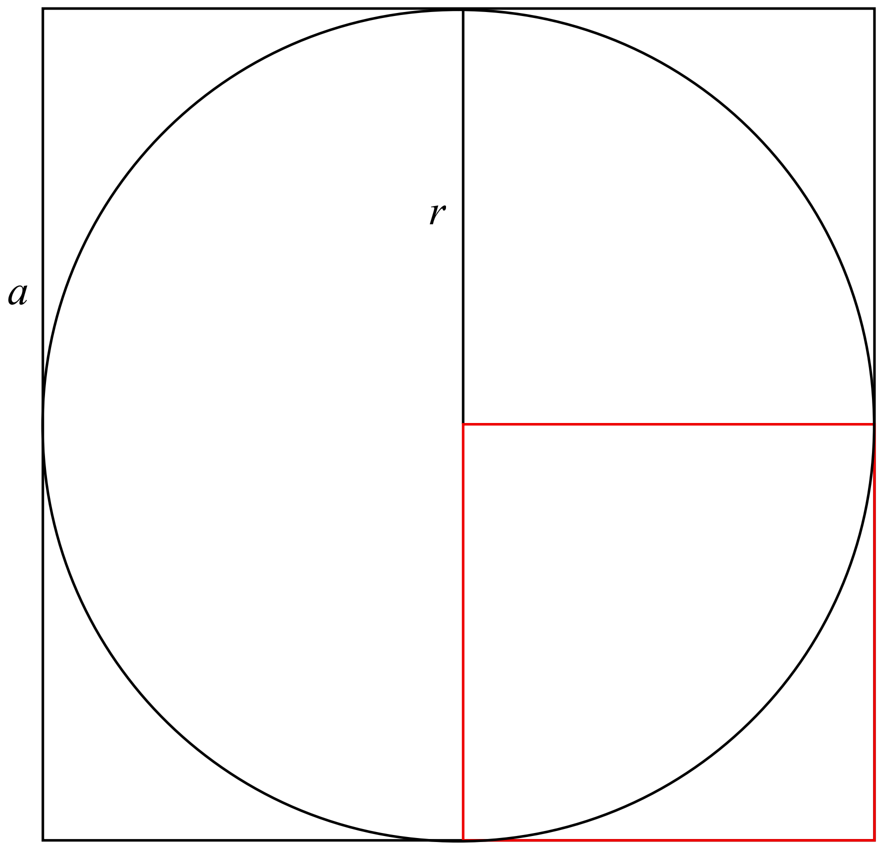


Abbildung 1

Workshop: Irrationale Zahlen und Approximation

In diesem Workshop sollen SuS selbstständig verschiedene Methoden der Approximation erarbeiten, dabei führen sie verschiedene Verahren selbst durch und bewerten diese, finden selbst allgemeine Formeln zur Approximation und führen auch einen Beweis.

Die Stationen ergänzen sich inhaltlich, bauen aber nicht aufeinander auf, sie können also in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Einige Stationen bieten sich auch dazu an, vom Workshop losgelöst, in den Unterricht eingebaut zu werden (zum Beispiel kann die Station zum Heron-Verfahren bearbeitet werden, wenn im Rahmen der reellen Zahlen Kubikwurzeln besprochen werden).

- Stationsarbeit, mit 3-5 SuS pro Station (bei größeren Gruppen jede Station zweimal aufbauen)
- Klassenstufe 9-11
- Zeit: 90 min
  - 5-10 min Einstieg mit PowerPoint Präsentation
  - Je 15-20 min pro Station (4 Stationen) je nach Pause, Wechselzeit, etc.
- Benötigte Materialien:
  - Jede Station pro SuS einmal ausdrucken (außer zweite Tabelle bei „Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, diese reicht einmal)
  - SuS brauchen Bleistift, Zirkel und Lineal !!!

Ablauf:

- Vorher Stationen aufbauen
- Lehrkraft hält die kurze PPP, zur Einführung in Irrationalität und Approximation
- Gruppe in Kleingruppe von 3-5 SuS aufteilen und jede Kleingruppe an eine Station schicken.
- Nach 15-20 min eine Station weiter schicken. Nach der zweiten Station ~5min Pause einplanen
- Wenn am Ende noch Zeit ist, kurze Feedbackrunde zur Ergebnissicherung machen (Wie hat es bei euch geklappt? Habt ihr was gelernt? Hattet ihr Spaß?)

Für die PowerPoint

Großteils sind die Folien selbsterklärend. Die Folie mit dem Beispiel zur Annäherung an π nach Archimedes ist etwas komplizierter. Die Idee hier ist, dass die Lehrkraft das Grundbeispiel mit einem Sechseck im Kreis und einem außen am Kreis an die Tafel zeichnet und dann zeigt, dass man durch die Vergleiche der Umfänge bzw. Flächeninhalte des äußeren und des inneren Sechsecks π annähert. Dann kann ein Beispiel mit Größerem n-Eck auf der PPP gezeigt werden.

Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Aufgabe 1…

… dient der Wiederholung einiger Grundbegriffe. Die SuS sollen hier kurz in eigenen Worten schreiben, was die natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen sind. Das muss nicht mathematisch komplett korrekt sein, aber vom Verständnis her richtig.

Mögliche Lösungen:

a) („Natürliche Zahlen“) $N :=$ „Das sind die Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; etc.“
b) („Ganze Zahlen“) $Z :=$ „Die natürlichen Zahlen und ihre Minuszahlen“
c) („Rationale Zahlen“) $Q :=$ „Alle Brüche“
d) („Reelle Zahlen“) $R :=$ „Alle Zahlen die es gibt, auch alle Kommazahlen“

Aufgabe 2:

Hier sollen die SuS versuchen einen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zu führen. In die erste Tabelle sollen sie die Lösungen eintragen und haben da auch einen ersten Hinweis dabei. In der zweiten Tabelle ist für jeden Schritt ein weiterer Hinweis und die Lösungskarte. Die Idee ist, dass die zweite Tabelle nur einmal ausgedruckt werden muss. Dann muss die Lehrkraft vorher einmal die zweite Tabelle so ausschneiden, dass wie bei einem Escape Game zu jedem Schritt ein Stapel mit je einer Hinweiskarte und einer Lösungskarte auf dem Tisch liegt. Dazu sollten die Karten auf ihrer Rückseite noch einmal handschriftlich mit der „Hinweis“ oder „Lösung“ und der Ziffer des Schrittes beschriftet werden (also die Lösungskarte für Schritt 3 etwa kriegt die Beschriftung „Lösung 3“ oder „L 3“). Es sollte darauf geachtet werden, dass die SuS wenn sie denken einen Schritt gelöst zu haben, trotzdem immer nochmal die Lösungskarte anschauen, damit sichergestellt ist, dass sie es richtig gemacht haben. Sonst kann es sein, dass der Beweis nicht gelöst werden kann.

Monte-Carlo-Methode zur Approximation von π

Die Teilaufgaben a), b) und c) dienen ein wenig der Hinführung zum eigentlichen Teil dieser Station. Die SuS müssen hier kleine Formeln und Aussagen ausfüllen. Dadurch wiederholen sie einiges an Grundwissen, das später gebraucht wird.

Lösungsvorschläge:

a) a = *2r* ; $A_{Quadrat} = a^2$

b) $\frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} = \frac{\pi * r^2}{a^2} = \frac{\pi * r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi * r^2}{4 * r^2} = \frac{\pi}{4}$

c) Antwort: Weil im roten Quadrat genau ein Viertel vom Kreis und ein Viertel vom Quadrat sind, und daher das Verhältnis das Gleiche ist.

Bei den Aufgaben d) und e) geht es dann um die eigentliche Monte-Carlo Methode. Da die Punkte per Hand nur schwer zufällig verteilt werden können, kann es zu nicht richtigen Lösungen kommen. Das kann am Ende nochmal so erklärt werden.

Heronverfahren

Die SuS sollen in den Aufgaben das Heronverfahren an einem Beispiel anwenden. In der letzten Aufgabe verallgemeinern die SuS das zuvor gelernte Verfahren und versuchen eine Formel für höhere Wurzeln herzuleiten. Für diese Station benötigen die SuS ein Geodreieck.

Lösungsvorschläge:

Wie funktioniert das?

2. 1 und 5
3. der Mittelwert: $\frac{5+1}{2}$
5. x_1=2, y_1=2,5
6. Das Verfahren so oft wie möglich wiederholen.

Und was ist mit höheren Wurzeln?

2. Eine einfache Grundfläche, ist das Quadrat. Dann sind die Länge und die Breite des Quadrats x_0 und wir müssen nur noch die Höhe berechnen. Wir berechnen also: $y_0 = \frac{A}{x_0^2}$A ist die Zahl die deren Wurzel angenähert werden soll.
3. $x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}$

5. $y_n = \frac{A}{x_n^{k-1}}$ und $x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + y_n}{k}$

Quadratur des Kreises

Die SuS sollen an dieser Station, anstatt eine konkrete Zahl zu approximieren, in verschiedenen Aufgaben versuchen die Quadratur des Kreises durchzuführen und dabei selbst den Fehler finden der die Verfahren ungenau macht (in beiden Fällen eine ungenaue Approximation von π). Für diese Station benötigen die SuS einen Taschenrechner, ein Lineal und einen Zirkel.

Lösungsvorschläge:

Ein antikes Problem

1. $A_K = \pi r^2$ und $A_Q = s^2$
2. $\pi r^2 = s^2$ also: $\pi = s^2$
3. π

Methode aus dem Papyrus von Rind

5. $A_K = \pi r^2$ und $A_Q = s^2 = (\frac{8}{9} 2r)^2 = \frac{8^2}{9^2} 4r^2$
6. $\pi r^2 = \frac{8^2}{9^2} 4r^2$ gilt, falls $\pi = \frac{8^2}{9^2} 4$

Methode von Hobson

6. $A_K = \pi r^2$ und $A_Q = s^2 = (\frac{3}{5} r + \frac{3}{2} r)^2$ Setze das r ein, dass verwendet wurde und vergleiche die Ergebnisse.