

Wie unterscheidet man Knoten?

1

Tauscht euch zu folgenden Fragen aus und macht euch Notizen auf dem Handout:

Welche Methode kennt ihr schon, um zu zeigen, dass zwei Knoten gleich sind?

Habt ihr Ideen, wie man zeigen kann, dass zwei Knoten verschieden sind? Z.B. der Kleeblattknoten und der Unknoten?

Wofür ist Ausprobieren nützlich und wofür nicht?

Station: Knoteninvarianten

Knoteninvarianten

2

Hier stellen wir eine Methode vor, mit der man zeigen kann, dass zwei Knoten verschieden sind.



Idee: Wir teilen alle Knoten in verschiedene Klassen ein. Wenn zwei Knoten in zwei unterschiedlichen Klassen sind, können sie nicht gleich sein. Eine solche Klasseneinteilung nennt man Invariante.

Für Knoteninvarianten gelten verschiedene Regeln:

Alle Knoteninvarianten müssen die **Reidemeister-Bewegungen** „überstehen“, das heißt, trotz solcher Umformungen bleibt ein Knoten stets in derselben Klasse, in die er zunächst einsortiert worden ist.

Gehören **zwei Knoten** bezüglich einer bestimmten Knoteninvariante in **verschiedene Klassen**, so ist bewiesen, dass es sich um zwei **unterschiedliche Knoten** handelt.

Gehören **zwei Knoten** bezüglich einer Knoteninvariante in **dieselbe Klasse**, so ist gar **nichts bewiesen** (man versucht dann, mit einer anderen Knoteninvariante, die Knoten zu „trennen“).

Es gibt noch **keine Knoteninvariante**, die **jeden Knoten** von einem anderen **trennt**.

Station: Knoteninvarianten

Station: Knoteninvarianten

Station: Knoteninvarianten

Knoteninvarianten - intuitive Erklärung

3

Überlegt euch, wie ihr die Idee von Knoteninvarianten in eigenen Worten erklären könntet. Macht euch Notizen auf dem Begleitblatt.



Auf der Rückseite findet ihr das Konzept noch einmal intuitiver erklärt. Wenn ihr glaubt, ihr habt das Konzept schon gut verstanden, könnt ihr aber auch direkt zum Quiz gehen.

Station: Knoteninvarianten

Station: Knoteninvarianten

Eine Knoteninvariante kann man sich wie diese Socken-Kommode vorstellen - nur für Knoten:

Wenn ich mir die Kommode von außen anschau, weiß ich nur anhand der Schubladen, dass zwei Socken nicht gleich sein können, wenn sie in unterschiedlichen Schubladen einsortiert wurden. Über den Inhalt einer bestimmten Schublade kann ich aber nichts sagen: dort können die Socken entweder gleich sein, oder unterschiedlich - z.B. verschiedene Grüntöne haben, obwohl sie beide in der Grüne-Socken-Schublade sind.



Station: Knoteninvarianten

Station: Knoteninvarianten

Quiz

4

Hier könnt ihr testen, ob ihr die Erklärung zu Invarianten gut verstanden habt: Entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Die Lösung findet ihr auf der Rückseite.

Zwei Knoten, die ich ohne „kaputtmachen“ ineinander umformen kann, landen unter einer Knoteninvariante in der gleichen Klasse.

Eine Knoteninvariante ist eine Klasse, in die ich Knoten einsortiere.

Wenn zwei Knoten unter einer Knoteninvariante in der gleichen Klasse landen, sind sie gleich.

Station: Knoteninvarianten

Station: Knoteninvarianten

Quiz: Lösung

Aussage 1: *Zwei Knoten, die ich ohne „kaputtmachen“ ineinander umformen kann, landen unter einer Knoteninvariante in der gleichen Klasse.*

Das ist richtig: denn dann lassen sich die Knoten durch Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen, sind also gleich. Es wäre daher schlecht, wenn sie in zwei verschiedenen Klassen landen würden.

Aussage 2: *Wenn zwei Knoten unter einer Knoteninvariante in der gleichen Klasse landen, sind sie gleich.*

Das ist falsch: wenn zwei Knoten in der gleichen Klasse landen, kann man keine Aussage treffen, ob sie gleich oder verschieden sind.

Aussage 3: *Eine Knoteninvariante ist eine Klasse, in die ich Knoten einsortiere.*

Das ist falsch: eine Knoteninvariante legt Regeln fest, nach denen ich Knoten in Klassen einteile und ist nicht selbst eine Klasse.

Station: Knoteninvarianten

Station: Knoteninvarianten

Dreifärbbarkeit

5

Hier lernt ihr ein Beispiel für Knoteninvarianten kennen.

Mit der Knoteninvariante “Dreifärbbarkeit” teilt man Knoten in die Klassen “dreifärbbar” und “nicht dreifärbbar” ein.

Dafür benutzt man die folgende Definition:

Ein Knoten heißt **dreifärbbar**, wenn sich eines seiner Knotendiagramme nach folgenden Regeln einfärben lässt:

1. Jeder Bogen hat **zwischen zwei Unterkreuzungen** eine **einheitliche Farbe**.
2. Eine **Kreuzung** ist entweder **einfarbig** oder es treffen sich genau **drei Farben**.
3. Es **gibt eine Kreuzung**, die **nicht einfarbig** ist.

Wie man die Dreifärbbarkeit nutzen kann, seht ihr auf der nächsten Karte.

Station: Knoteninvarianten

Dreifärbbarkeit - Beispiel

6

Wir überprüfen jetzt mithilfe der Dreifärbbarkeit, ob der Unknoten und der Kleeblattknoten verschieden sind.

Probiert an den Bildern auf eurem Begleitblatt aus, ob der Unknoten und der Kleeblattknoten dreifärbbar sind oder nicht.

Die Lösung findet ihr auf der Rückseite.



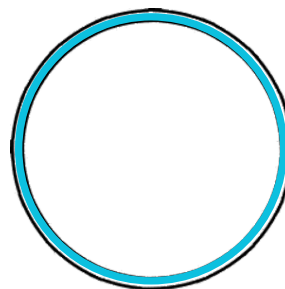
Was könnt ihr aus dem Ergebnis schlussfolgern? Sind der Unknoten und der Kleeblattknoten verschieden?

Auch hier ist die Lösung auf der Rückseite.

Station: Knoteninvarianten

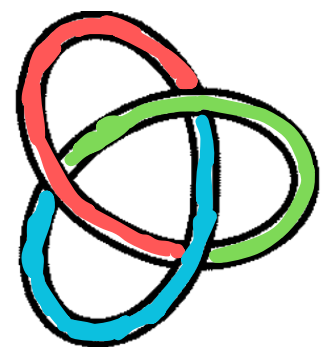
Dreifärbbarkeit - Lösungen

Der **Unknoten** ist **nicht dreifärbbar**: wenn man die 1. Regel befolgen will, lässt sich keine Kreuzung finden, die dreifarbig ist (es gibt einfach keine Kreuzung).



Der **Kleeblattknoten** ist **dreifärbbar**: ein Beispiel sieht man auf dem Bild.

Die beiden Knoten sind also in unterschiedlichen Klassen der Invariante “Dreifärbbarkeit” und damit verschieden!



Du hast jetzt verschiedene Möglichkeiten, weiterzumachen: Du kannst...
... an dieser Station bleiben und weitere Knoten auf Dreifärbbarkeit überprüfen
oder beweisen, dass Dreifärbbarkeit tatsächlich eine Invariante ist.
... die Station wechseln.